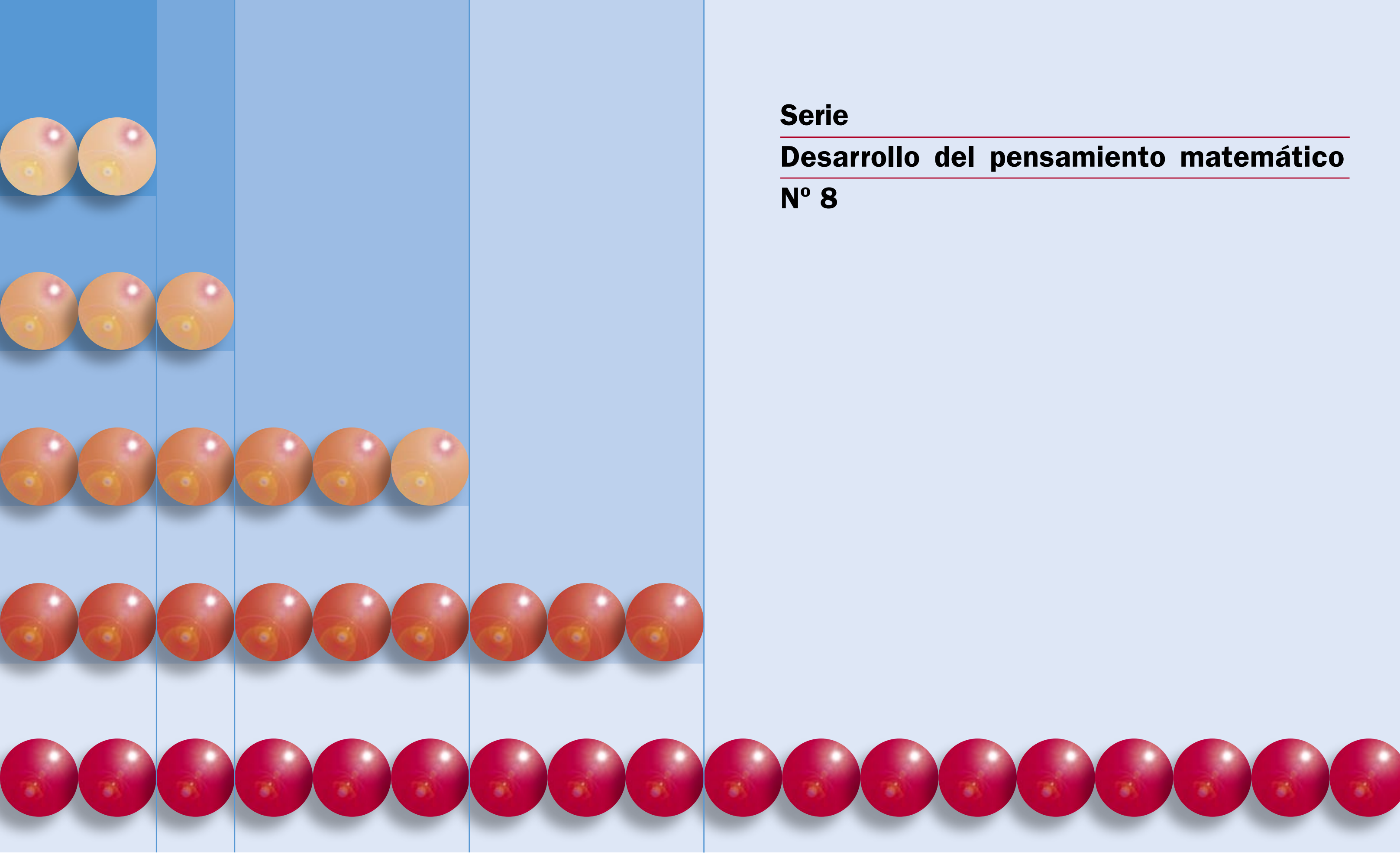


Serie
Desarrollo del pensamiento matemático
Nº 8

Divisibilidad

Martín Andonegui Zabala

372.7
And.
Divisibilidad
Federación Internacional Fe y Alegría, 2006.
30 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-6418-78-6
Matemáticas, Divisibilidad.

"...nuestra tarea no es enseñar a los estudiantes a pensar... ellos ya lo hacen; sino intercambiar nuestras formas de pensamiento con cada uno de los otros y mirar juntos para encontrar mejores formas de enfocar la decodificación de un objeto".

Paulo Freire

Equipo editorial

Beatriz Borjas

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Serie: Divisibilidad, número 8
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del **Programa Internacional de Formación de Educadores Populares** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.

Diseño y diagramación: Juan Bravo
Portada e ilustraciones: Juan Bravo
Corrección de textos: Beatriz Borjas, Carlos Guédez, Margarita Arribas

Edita y distribuye: Federación Internacional Fe y Alegría. Esquina de Luneta, Edif. Centro Valores, piso 7, Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212) 5631776 / 5632048 / 5647423
Fax (58) (212) 5645096
web: www.feyalegria.org

Depósito Legal: lf 603 2006 510 336
Caracas, marzo 2006

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis
Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina de Fomento (CAF)

A modo de

introducción...

... y para desperezarnos un poco, ahí van unas cuestiones sencillas para entrar en materia y en calor. Tratemos de resolverlas antes de seguir adelante.

*Halle el número menor que **30** que es simultáneamente divisor de **100**, múltiplo de **10** y no múltiplo de **4**.*

¿En qué cifras terminan los números primos mayores que **5**?

***1.** Se tienen tres piezas de tela del mismo ancho, cuyas longitudes son: **180** m, **225** m y **324** m. Se desea dividir las tres piezas en lotes del mismo tamaño. ¿Cuál debe ser la longitud de estos lotes para que el número de cortes en las tres piezas sea el menor posible?*

2. En un estante de la biblioteca escolar hay menos de **1.000** libros, todos del mismo tamaño. La bibliotecaria nos dice que se pueden empaquetar, sin que sobre ningún libro, por **docenas**, de **28** en **28**, o de **49** en **49**. ¿Cuántos libros hay exactamente?

Halle todas las parejas de números primos cuya suma sea **999**.

*Descomponga **40** en suma de **tres** números primos, de todas las maneras posibles.*

3. En cierto planeta, el número de días de la semana, de semanas del mes y de meses del año es el mismo. Si el año consta de **512** días, ¿cuántos días tiene una semana?

*El producto de dos números es **504**. Cada uno de ellos es divisible por **6**, pero ninguno de ellos es **6**. ¿Cuál es el mayor de estos dos números?*

***4.** La edad de la maestra tiene la particularidad de que, al dividirse entre **2**, **3**, **4**, **6** y **8**, siempre da como resto **1**. Pero al dividirse entre **5**, da como resto **0**. ¿Cuántos años tiene la maestra?*

(*) Aviso a los navegantes: Las respuestas a los ejercicios precedidos por un número en **negrita** aparecen al final del Cuaderno. Las respuestas a los ejercicios que no se encuentran precedidos por un número no las encontrarás en este Cuaderno. Dichas respuestas son para que las construyas y las valides con tu grupo de trabajo.

Los números 6, 14 y 15 son divisores de N. ¿Cuál puede ser el menor valor de N?

*¿Cuál es el menor entero positivo por el que se debe multiplicar **504** para obtener como producto un cuadrado perfecto?*

Las letras a y b esconden dos cifras. Halle su valor para que el número 18a7b sea múltiplo de 15. Obtenga todas las respuestas posibles.

*Si el precio de un objeto se puede pagar exactamente con sólo monedas de **20** pesos, y también con sólo monedas de **25** pesos, ¿se podrá pagar exactamente con sólo monedas de **50** pesos? ¿Y con sólo billetes de **200** pesos?*

5. En la mañana pagué 360 pesos por un lote de fotocopias. En la tarde estuve sacando otras más y pagué 126 pesos. ¿Cuánto cuesta cada fotocopia, si su precio es mayor que 10 pesos?

Bien, ya tenemos nuestras respuestas, que iremos contrastando con las indicaciones y ejercicios que plantearemos a lo largo de las líneas que siguen.

Y un segundo recordatorio:

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento– y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento de lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales...– que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel– ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, la divisibilidad.

1. De qué hablamos cuando hablamos de divisibilidad

Muchos docentes responderían al planteamiento anterior en términos muy simples: de criterios de divisibilidad (por 2, por 3, etc.), de descomposición de un número en factores primos para calcular el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo de dos números, y ya. Y todo ello tratado de una forma práctica, reducida a cómo se hacen las cosas, a las reglas correspondientes a cada caso.

Sin embargo –y como lo iremos viendo a lo largo de este Cuaderno–, el tema de la divisibilidad se refiere al estudio de los números naturales [en realidad, al de los números enteros, aunque se puede reducir, como en este caso, al de los naturales] desde la perspectiva de su composición multiplicativa, es decir, pensando en que todo número natural siempre puede describirse como producto de varios factores. De esta consideración tan sencilla y de la curiosidad e intuición de algunas personas arrancó en la historia de la matemática un estudio muy amplio que abarca conceptos, relaciones, propiedades, regularidades y también aplicaciones. Los ejercicios planteados al comienzo dan una breve idea de por dónde pueden ir las cosas.

Y para entendernos mejor en lo que sigue, vamos a establecer el vocabulario básico del tema. Si planteamos, por ejemplo, la multiplicación 5 x 8 = 40, decimos que:

40 es *múltiplo de* **5** y de **8** ⟶ el producto es múltiplo de cada uno de sus factores

40 es *divisible por* **5** y por **8** ⟶ el producto *es divisible* por cada uno de sus factores

5 (y también **8**) es *divisor de* **40** ⟶ cada uno de los factores es *divisor* del producto

5 (y también **8**) *divide a* **40** ⟶ cada uno de los factores *divide al* producto

Es preciso hacer una pequeña aclaratoria con respecto al término “divisor”, utilizado también en las divisiones entre números naturales (Cuaderno 7). En ese contexto, divisor es el número por el que se divide el dividendo, para producir un cociente y un resto. Si la división no es exacta, ese “divisor” no puede ser considerado como un “divisor” del dividendo en términos de lo planteado en el campo de la divisibilidad. Por ejemplo, el divisor **7** en la división **40 : 7**, no es un “divisor de **40**” en términos de divisibilidad. En lo que sigue nos referiremos a divisor en estos últimos términos.

Así, **7** es divisor de (divide a) **0**, **7**, **21**, **49**, **105**, etc. Es decir, de todos los productos de su tabla de multiplicar, que es ilimitada. Análogamente, **36** es múltiplo de **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, **9**, **12**, **18** y **36**, es decir, de todos y sólo de los números que lo tienen como producto en sus respectivas tablas de multiplicar. Ahora ya podemos precisar un poco más:

Hablar de divisibilidad en el conjunto de los números naturales es hablar de los divisores y múltiplos de esos números, así como de las relaciones que pueden establecerse entre tales números al considerarlos como múltiplos y divisores unos de otros.

A partir de los casos anteriores y de otros similares, empezamos ya a descubrir ciertas regularidades (después iremos precisando otras). Por ejemplo:

- **0** es múltiplo de todos los números naturales (cualquier número multiplicado por **0** da **0** como producto).
- **0** no es divisor de ningún número natural positivo (¿por qué?).
- **1** es divisor de todos los números naturales (al multiplicar cualquier número por **1** se obtiene ese mismo número como producto).
- **1** sólo es múltiplo de sí mismo (¿por qué?).
- Todo número es múltiplo y divisor de sí mismo (¿por qué?).
- Todo número es múltiplo de sí mismo y de la unidad (¿por qué?).

2. En el mercado de los números, números hay...

...y muy variados. Salgamos al encuentro de algunos de ellos. Empecemos por jugar a escribir números como producto de parejas de factores, de todas las maneras posibles. Por ejemplo, tomemos los números **13**, **15**, **24** y **41**:

13 = 1 x 13
15 = 1 x 15; 15 = 3 x 5
24 = 1 x 24; 24 = 2 x 12; 24 = 3 x 8; 24 = 4 x 6
41 = 1 x 41

En seguida nos damos cuenta de que hay dos números, **13** y **41**, que sólo tienen un par de divisores: la unidad y el propio número. Los números que sólo poseen estos dos divisores se llaman *números primos*. En cambio, 15 y 24 poseen más divisores: 4 para 15 (1, 3, 5, 15) y 8 para 24 (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24). Los números que poseen más de dos divisores se denominan *compuestos*.

Observados con curiosidad, los números primos son unos números "rebeldes" que no se dejan dividir por otros números; están, pues, vacíos de divisores entre la unidad y ellos mismos. Estos números

llamaron la atención de los estudiosos hace más de 2.000 años. Ya Euclides (300 a.C.) demostró que el número de números primos es infinito...

Eratóstenes (matemático y geógrafo griego que vivió en el s. III a. C.) se inventó una criba para ir obteniéndolos. El método es muy sencillo, aunque muy lento: en la lista de todos

los números positivos (exceptuando el 1, que no es primo pues sólo tiene un divisor: el propio 1), respetamos cada número que vamos encontrando sin tachar (por ejemplo, el 2 al empezar la tarea) pero vamos tachando todos los múltiplos de ese número, mayores que él. Así, iremos tachando los de 2 (4, 6, 8, etc.), luego los de 3 que no hayan sido tachados antes (9, 15, etc.); y, sucesivamente, los múltiplos de los números que van quedando sin tachar (los de 5, 7, 11, etc.). De esta forma van quedando, filtrados y ordenados, los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc. Si observamos con cuidado esta lista notamos que hay *un solo número primo par, el* 2. Y que *a partir de* 5, *los posibles números primos terminan en* 1, 3, 7 ó 9.

El método de Eratóstenes quedó ahí, para quien tenga tiempo y paciencia. Pero en seguida, la gente curiosa se preguntó si había algún procedimiento (algoritmo) que pudiera ir generando de otra forma la lista completa de los números primos. Y empezaron los intentos. Uno de los más curiosos es el que propone que en la expresión: $n^2 + n + 41$, se sustituya n por 0, 1, 2, 3, etc. y se evalúe el número que se obtiene cada vez.

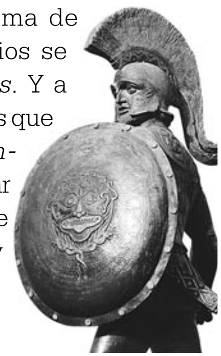
Por ejemplo, para $n = 0$, se obtiene $0 + 0 + 41 = 41$; para $n = 1$, se obtiene $1 + 1 + 41 = 43$; para $n = 2$, se obtiene 47; para $n = 3$, se llega a 53. Todos estos números (41, 43, 47, 53) son primos. Y, asombrosamente, la cosa funciona... hasta llegar a $n = 40$, cuando se obtiene $40^2 + 40 + 41 = 1.681$, que es 41^2. En efecto, $40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 81 = 40^2 + 80 + 1 = 40^2 + 2 \times 40 + 1$, expresión que podemos reconocer como $(40 + 1)^2$ [Ver Cuaderno 6, Potenciación]. Evidentemente, 41^2 no es un número primo. Pero el intento fue bueno... y funcionó ¡40 veces seguidas!

También Euclides, en la demostración antes mencionada, nos indica una manera de obtener números primos, aunque no en forma ordenada como Eratóstenes. Para ello observó que si p es un número primo, al formar el producto de p por todos los números primos anteriores, y agregarle una unidad a ese producto, el nuevo número así obtenido también es primo. Por ejemplo, si partimos de 7, el número primo a que se llega es: $7 \times 5 \times 3 \times 2 + 1 = 210 + 1 = 211$. Con el procedimiento de Euclides se llega en seguida a números primos muy grandes. Y de paso, se ve que siempre podemos llegar a otros más grandes...

Por cierto, la carrera por encontrar un número primo más grande que los ya conocidos sigue (y seguirá) abierta. A comienzos del año 2005 se había conseguido uno –siempre con la ayuda de computadores– de 7.816.230 cifras... Se trata del número $2^{25.964.951} - 1$. Y parece que hay ofrecido un premio de **100.000** dólares al primero que consiga un número primo de al menos **10 millones** de cifras..., logro que los matemáticos estiman que se alcanzará en el año 2007. ¿Quién se anima a esta búsqueda?

Los griegos también destacaron otros tipos de números, a base de observar propiedades y relaciones. Por ejemplo, si nos fijamos en el número **6**, fácilmente podemos obtener la lista de sus divisores: **1**, **2**, **3** y **6**. Si en esa lista prescindimos del **6**, tendremos el conjunto de los *divisores propios* de **6**: **1**, **2** y **3**. ¿Qué ocurre si sumamos estos tres divisores? Que obtenemos justamente **6**.

Los números cuya suma de divisores propios es igual al mismo número fueron bautizados como *números perfectos*. Algunos de los conocidos son **6**, **28**, **496**, **8.128** (puede verificarlo; y plantearse si habrá algún número perfecto que sea impar..., porque hasta ahora no se ha descubierto ninguno). Como nota adicional (Kline, 1992), a los números mayores que la suma de sus divisores propios se les llamó *deficientes*. Y a los números menores que dicha suma, *abundantes* (trate de hallar algunos ejemplos de cada especie). Muy expresivos los griegos, ¿no?



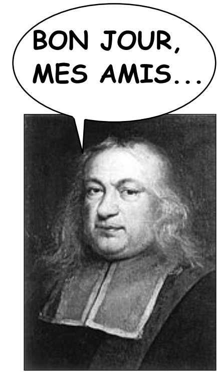
Otra curiosidad cercana es la que nos presenta este par de números, **284** y **220**: obtenga los divisores propios de **220** y súmelos; haga lo mismo con los de **284**. ¿Qué hemos hallado? Sorpresivamente, la suma de los divisores propios de cada número da como resultado el otro número. A los pares de números que presentan esta propiedad, se les denominó *números amigos*.

Vamos a hacer un punto de reflexión. ¿Qué interés puede tener para nosotros andar revisando estos avatares históricos acerca de los números? Pues uno muy importante. Nos interesa resaltar esa curiosidad por descubrir regularidades, propiedades, relaciones entre los números. Este es el espíritu con el que debemos transitar no sólo por el tema de la divisibilidad, sino por todos los campos de la matemática.

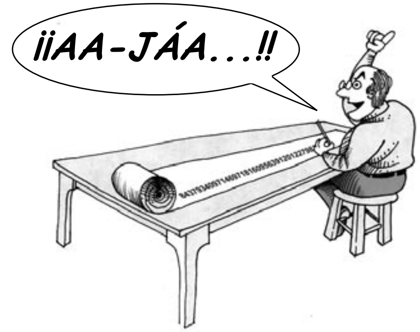
3. Matemática: de las conjeturas y los problemas abiertos, a las demostraciones

Siguiendo con el punto de reflexión anterior, no hay que pensar que lo de la curiosidad es simplemente un buen consejo. No. La actitud indagatoria es la esencia de cualquier descubrimiento científico. Así lo demuestra hasta la saciedad la historia de la matemática, considerada como una aventura humana. En ella, en el principio fue la curiosidad. Y la observación atenta. De ahí nacieron las conjeturas. Hay muchas en la historia del desarrollo de la divisibilidad. Veamos algunas.

Por ejemplo, ya los chinos, antes de Cristo, afirmaban que si p es un número primo, entonces p es divisor de $2^p - 2$ (así, para $p = 5$, $2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$ y, efectivamente, **5** divide a **30**; verifíquelo para otros casos). Y hasta pensaban que la cosa funcionaba también al revés, es decir, que si un número p es divisor de $2^p - 2$, entonces p debía ser un número primo (Gentile, 1985).



La primera parte de esta conjetura es cierta y fue demostrada, entre otros, por nuestro amigo Fermat (de quien ya hablamos en el Cuaderno 6, a propósito de otras conjeturas...) en el siglo XVII, en los ratos libres que le dejaba su profesión de abogado. Pero la segunda parte de la conjetura es falsa, ya que algún "ocioso" verificó que **341** divide a $2^{341} - 2$ y, sin embargo, **341** no es primo: **341 = 11 x 31** (no intente hacer esa verificación con papel y lápiz, ya que 2^{341} es un número de 103 cifras...).



Otra conjetura interesante fue propuesta por Girard, a comienzos del siglo XVII (Sierra et al., 1989): si un número primo es de la forma $4 \times n + 1$ (un múltiplo de **4**, más **1**; por ejemplo, **5**, **13**, **29**...), entonces puede expresarse de una y sólo una manera como suma de dos cuadrados. Por ejemplo, $5 = 4 + 1$; $13 = 4 + 9$; $29 = 25 + 4$; etc. (busque otros casos). Fermat, quien también demostró la conjetura anterior, adelantó a su vez unas cuantas (Kline, 1992). He aquí algunas:

- El cuadrado de todo número primo de la forma anterior: $4 \times n + 1$ (por ejemplo, 5^2, 13^2, ...), también puede expresarse de una y sólo una manera como suma de dos cuadrados. Así, $5^2 = 25 = 16 + 9$; $13^2 = 169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2$; etc. (verifique otros casos).
- Ningún número primo de la forma $4 \times n + 3$ (un múltiplo de **4**, más **3**; por ejemplo, **7**, **11**, **19**...), puede expresarse como suma de dos cuadrados (verifíquelo con algunos casos).
- Si un número primo es de la forma $6 \times n + 1$ (un múltiplo de **6**, más **1**; por ejemplo, **13**, **19**...), entonces puede expresarse de una y sólo una manera como suma de un cuadrado más el triple de otro cuadrado. Así, $13 = 1 + 3 \times 4$; $19 = 16 + 3 \times 1$ (verifique otros casos).

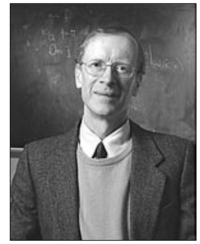
Curioso, ¿no? Lo cierto es que Fermat dejó toda una colección de conjeturas que no demostró y algunas otras cuyas demostraciones no convencieron a los matemáticos que vinieron detrás de él. Pero en definitiva, lo bueno es que dejó una gran "tarea para la casa". Uno de los que más se aplicaron en esta tarea fue Euler, un matemático alemán del siglo XVIII. Y también Gauss, otro matemático alemán de la primera mitad del siglo XIX.


Gauss


Euler

En general, se espera que tarde o temprano las conjeturas se demuestren rigurosamente. A veces se tarda "un poco", como en el caso que mencionamos en el Cuaderno 6, conocido como "el último teorema de Fermat", cuyo enunciado dice: "No existen valores x, y, z tales que verifiquen la relación $x^n + y^n = z^n$ (en la que x, y, z, n son números enteros positivos) si $n > 2$". Es decir, un cubo no puede expresarse como la suma de dos cubos, ni una cuarta potencia como la suma de dos cuartas potencias, y así sucesivamente.

Esta conjetura, de enunciado tan sencillo, fue demostrada por el matemático inglés Andrew Wiles en 1994... –más de 300 años después de haber sido formulada–, y el hecho se convirtió en una noticia de cobertura mundial. Pero si la demostración fue todo un suceso, no lo fue menos (aunque más callado) el trabajo desarrollado durante esos tres siglos en la búsqueda de la demostración: la matemática producida en ese esfuerzo fue realmente notable y hasta se abrieron nuevos campos en la disciplina.


Andrew Wiles

En todas las épocas –y hoy también– existen conjeturas y problemas abiertos, a la espera de una demostración (o de una refutación). Por ejemplo, de tanto en tanto aparece la noticia de alguien que encontró el mayor número primo (por el momento...). También está abierta la búsqueda de nuevos números perfectos, o de nuevas parejas de números amigos... Y conjeturas y problemas abiertos como éstos (Alsina y De Guzmán, 1998):

- Todo número par mayor que **4** es suma de **dos** números primos impares (conjetura formulada por Goldbach, un matemático alemán que vivió en el siglo XVIII).
- Todo número impar, o es primo, o es la suma de **tres** primos (for-

mulada por Waring en la segunda mitad del siglo XVIII).

- ¿Existe un número infinito de pares de primos gemelos, es decir, de primos que se diferencian en dos unidades (como **3 y 5**, **5 y 7**, **11 y 13**, **17 y 19**, etc.)?
- ¿Hay siempre al menos un número primo entre n^2 y $(n + 1)^2$, siendo n cualquier número natural positivo?
- ¿Existe un número infinito de números primos de la forma $n^2 + 1$ (como **2**, **5**, **17**, etc.), siendo n cualquier número natural positivo?

El hecho de que haya problemas abiertos en matemática no revela una debilidad de esta disciplina, sino, por el contrario, su gran vitalidad. Lo que importa es lo que se hace para resolverlos. Y muchas veces se desea que el hecho de "cerrar" un problema sirva para abrir otros (Alsina y De Guzmán, 1998).

Quizás algún(a) lector(a) todavía se estará preguntando para qué todos estos cuentos... Pero seguramente muchos ya saben la respuesta: la curiosidad, la búsqueda, el planteamiento de conjeturas, el intento por verificarlas (o por refutarlas), el hacerse nuevas preguntas..., todo esto forma parte de la historia y del "ser" de la matemática, la manera como se construye por dentro. La presentación formal de sus resultados es sólo la apariencia final (muy importante). Pero por dentro, hay conjeturas; aceptables unas, rechazables otras. También hay problemas abiertos. Y todo un trabajo de búsqueda en el que la intuición, el razonamiento y la perseverancia van de la mano.

Lo importante es percibir que este "ser" de la matemática puede estar presente en cada rincón de la misma, en cada esfuerzo por trabajar un tema, por pequeño que pueda parecer. Es lo que Edgar Morin llama el principio holográmico del pensamiento complejo: cada parte está contenida en el todo, pero también el todo debe estar presente en cada parte, puede descubrirse en cada parte (Morin, 1999).

Por consiguiente, y sin temor de repetirnos, la curiosidad, la búsqueda, el planteamiento de conjeturas, el intento por verificarlas y validarlas (o por refutarlas), el hacerse nuevas preguntas..., todo esto forma parte del clima en que debemos trabajar la matemática, parcela por parcela, nosotros y con nuestros alumnos. Y el campo de la divisibilidad es, como estamos viendo, uno de los más fértiles para este propósito.

*Tome un número de dos cifras (p. ej., **37**); forme otro número con las cifras del anterior en orden invertido (**73**); obtenga la diferencia positiva entre ambos números (**73 – 37 = 36**). Haga lo mismo con otros números y observe bien las diferencias en cada caso. ¿Qué conjetura se le ocurre? ¿Cómo puede estar segura(o) de su enunciado? ¿Y si lo hace con números de tres cifras? ¿Y con números de más cifras?*

Tome un número de dos cifras, inviértalo como antes, pero ahora sume los dos números. Divida esa suma entre **11**. Haga lo mismo con otros números y observe los resultados. Nuevamente, ¿qué conjetura se le ocurre? ¿Cómo puede estar segura(o) de su enunciado? ¿Y si lo hace con números de tres cifras?

4. Divisores y múltiplos de un número natural

Para empezar, vamos a realizar un ejercicio muy importante con el fin de ir observando y afianzando algunas regularidades con divisores y múltiplos:

6. *Evalúe cada una de las siguientes afirmaciones como verdadera o falsa. Para ello, ayúdese con ejemplos, contraejemplos (para refutar), argumentos...:*

1- *Si un número es divisor de varios otros, entonces divide a la suma de todos ellos.*
2- *Si un número divide a otro, entonces divide a cualesquiera dos sumandos en que se puede descomponer el segundo número.*
3- *Si un número es divisor de otros dos números, entonces divide a la diferencia entre el mayor y el menor.*
4- *Todo número distinto de **0** tiene infinitos múltiplos.*
5- *La suma de varios múltiplos de un número no es múltiplo de ese número.*
6- *Todo número distinto de **0** tiene un número infinito de divisores.*
7- *Si dos números son múltiplos de otro, también lo es la diferencia entre el mayor y el menor.*
8- *Si un número **a** es divisor de uno **b**, y éste a su vez es divisor de **c**, entonces **a** no tiene por qué ser divisor de **c**.*
9- *Si **a** y **b** son divisores de un número **N**, entonces **a + b** también es divisor de **N**.*
10- *Si **a** y **b** son divisores de un número **N**, entonces **a x b** también es divisor de **N**.*
11- *Si a y b son divisores primos de **N**, entonces **a x b** también es divisor de **N**.*
12- *Si un número es divisor de otro, entonces también es divisor de los múltiplos de éste.*
13- *Si **a** es divisor de **b**, entonces es divisor de **b + c** (**c**: cualquier número natural).*
14- *Si **a** es divisor de **b**, entonces es divisor de **a + b**.*
15- *Si a es divisor de **b**, entonces es divisor de **b x c** (**c**: cualquier número natural).*
16- *Si un número es múltiplo de otro, entonces también es múltiplo de todos los múltiplos de éste último.*
17- *Si un número es múltiplo de otro, entonces también es múltiplo de todos los divisores de éste último.*

4.1. Descomposición de un número en factores primos

Ahora vamos a entrar en la descomposición de un número en factores. Anteriormente vimos cómo cualquier número puede ser representado como producto de varios factores. Así, por ejemplo (sin contar con el factor 1), 36 = 2 x 18 = 3 x 12 = 4 x 9 = 6 x 6. Pero también, 36 = 2 x 2 x 9 = 2 x 6 x 3 = 3 x 3 x 4. Y, finalmente, 36 = 2 x 2 x 3 x 3. Prescindiendo del orden en que se coloquen los factores, no hay otros modos de "descomponer" en factores el número "compuesto" 36.

Todas esas posibles formas de descomponer 36 en factores tienen su interés. Pero una de esas formas es peculiar. Ya el lector la habrá descubierto: la última. Porque en ella todos los factores son números primos, cosa que no ocurre en las demás (verifíquelo). Es lo que denominamos la *descomposición de un número en factores primos*.

¿Y tiene algún interés esta propuesta de descomposición? Pues sí, porque sólo cuando un número se descompone en factores primos se logra una *descomposición única* (véase en el ejemplo anterior cómo cuando los factores no son primos, hay más de una descomposición posible). Dicho de otra manera, si un número **N** es producto de varios factores primos, esa descomposición de N en factores primos es única. Este resultado lo demostró Euclides 300 años antes de Cristo... y más tarde se vino a conocer nada menos que como el "Teorema fundamental de la Aritmética"...

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Como puede apreciarse, desde el punto de vista de la estructura interna multiplicativa de los números naturales, los números primos –nuestros números "rebeldes"– cobran una gran importancia: son los únicos "ladrillos" con los que se "hacen" todos los números... Ahora bien, para proceder a descomponer un número en sus factores primos necesitamos tres cosas:

1. Conocer los números primos.
2. Conocer alguna forma de saber cuándo un número es múltiplo de un número primo.
3. Utilizar algún artefacto o formato para ir escribiendo la descomposición factorial.

Para satisfacer la *condición* **1**, tenemos que familiarizarnos con los números primos, al menos con los primeros, que son los más usuales. Así que vayamos a la tabla de los 100 primeros números y marquemos los números primos presentes. Y tratemos de hacerles un espacio en nuestra memoria...

Para cubrir la *condición* **2**, hay dos formas de proceder. Una, utilizando la calculadora; así, si deseo saber si 368 es múltiplo de 7, divido 368 entre 7 y si el resultado es exacto, lo considero como múltiplo de 7. La otra forma de proceder es sirviéndonos de los ***criterios de divisibilidad***, es decir, de ciertos criterios que nos permiten, mediante la observación del número y de algún cálculo rápido, decidir si el número es o no múltiplo del factor primo.

Veamos este punto con cierto detalle. Para saber si un número es divisible por 2 acudimos a la tabla de los 100 primeros números y señalamos en ella todos los múltiplos de 2. Fácilmente observamos que se ubican sólo en las columnas cuya cifra de las unidades es 2, 4, 6, 8 y 0. Este es el *criterio de divisibilidad por 2*: *un número es múltiplo de 2 si acaba en cifra par*. Un proceso análogo de señalización y observación para los múltiplos de 5 nos lleva al *criterio de divisibilidad por 5*: *un número es múltiplo de 5 si acaba en 5 ó en 0*.

Para saber ahora si un número es divisible por 3 acudimos de nuevo a la tabla de los 100 primeros números, señalamos en ella todos los múltiplos de 3, y observamos dónde se ubican (en negrita):

	1	2	**3**	4	5	**6**	7	8	**9**
10	11	**12**	13	14	**15**	16	17	**18**	19
20	**21**	22	23	**24**	25	26	**27**	28	29
30	31	32	**33**	34	35	**36**	37	38	**39**
40	41	**42**	43	44	**45**	46	47	**48**	49
50	**51**	52	53	**54**	55	56	**57**	58	59
60	61	62	**63**	64	65	**66**	67	68	**69**
70	71	**72**	73	74	**75**	76	77	**78**	79
80	**81**	82	83	**84**	85	86	**87**	88	89
90	91	92	**93**	94	95	**96**	97	98	**99**

Tales múltiplos se ubican en líneas diagonales que proceden de arriba abajo, de derecha a izquierda. Tomemos una de ellas: 6, 15, 24, 33, 42, 51, 60. ¿Qué característica común presentan estos números? Que la suma de sus dígitos es 6, el mismo número de cabecera de la diagonal. Estos números de cabecera van cambiando (3, 6, 9, 39, 69,...), pero siempre se conserva la característica de que la suma de sus dígitos es, a su vez, un múltiplo de 3. Y esta propiedad se mantiene al trascender más allá de 99, con nuevos números de cabecera. De una forma análoga se visualiza la propiedad característica de los múltiplos de 9.

Este es el criterio *de divisibilidad por 3* (*por 9*): *un número es múltiplo* de 3 (de 9) *si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3* (*de 9*). También existen los respectivos criterios de divisibilidad para otros números primos (7, 11, etc.), pero son más complejos y, en todo caso, tenemos el recurso de la calculadora para decidir cada vez que se requiera.

Existen también algunos *criterios de divisibilidad* para números compuestos. Por ejemplo, para saber si un número es múltiplo de 4 ó de 25, observamos si sus dos últimas cifras (el resto no interesa) lo son por 4 ó por 25, respectivamente. Estos dos criterios se derivan del siguiente hecho: Sea el número 15.728; este número se puede descomponer en 15.700 + 28. El primer sumando siempre será múltiplo de 100 y, por lo tanto, de 4 y de 25 (100 = 4 x 25). Por esta razón, sólo hay que observar las dos últimas cifras del número: 28 es múltiplo de 4 y, por lo tanto, 15.728 también lo será (la suma de dos múltiplos de un número es múltiplo de ese número). En cambio, 28 no es múltiplo de 25 (con dos cifras, sólo lo son 00, 25, 50 y 75); por lo tanto, tampoco lo será 15.728. En definitiva, *un número es múltiplo de 4* (*de 25*) *si lo es el número formado por sus dos últimas cifras*.

Mediante un razonamiento análogo (partiendo de que 15.728 = 15.000 + 728, que 15.000 es múltiplo de 1.000, y que 1.000 = 8 x 125), se llega al criterio de que *un número es múltiplo de 8* (*de 125*) *si lo es el número formado por sus tres últimas cifras*.

Los casos que acabamos de ver corresponden a potencias de 2 (4 y 8) y de 5 (25 y 125). Pero hay otros casos en que se trata de productos de números primos. Así, por ejemplo:

- *Un número es múltiplo de 6* (*2 x 3*) *si lo es, simultáneamente, de 2 y de 3*.
- *Un número es múltiplo de 15* (*5 x 3*) *si lo es, simultáneamente, de 5 y de 3*.
- *Un número es múltiplo de 12 (4 x 3) si lo es, simultáneamente, de 4 y de 3*.
- *Un número es múltiplo de 18 (2 x 9) si lo es, simultáneamente, de 2 y de 9*.
- *Un número es múltiplo de 36 (4 x 9) si lo es, simultáneamente, de 4 y de 9*.
- *Un número es múltiplo de 10 (2 x 5) si acaba en 0*.

Ahora podemos resolver uno de los ejercicios del comienzo del Cuaderno y proponer otros similares:

*Las letras **a** y **b** esconden dos cifras. Halle su valor para que el número **18a7b** sea múltiplo de **15**. Obtenga todas las respuestas posibles.*

Si **18a7b** ha de ser múltiplo de **15**, debe ser divisible por **5** y por **3**. Por la primera condición, debe terminar en **5** ó en **0**; y por la segunda, la suma de sus cifras debe ser múltiplo de **3**. Si termina en **5**, los dígitos a sumar son **1**, **8**, **7**, **5** y ***a***; es decir, **21 + *a*** debe ser múltiplo de **3**, lo que hace que ***a*** pueda ser **0**, **3**, **6** ó **9**. Los números conseguidos son: **18.075**, **18.375**, **18.675** y **18.975**. Análogamente, si el número termina en **0** hay que pedir que **1 + 8 + 7 + 0 + *a* = 16 + *a*** sea múltiplo de **3**, lo que ocurre si ***a*** es **2**, **5** u **8**. Los números en este caso son: **18.270**, **18.570** y **18.870**.

7. Determinar si **13.046** es múltiplo:
a) de **3**; **b)** de **4**; **c)** de **6**

8. *Determinar si **148.500** es múltiplo:*
a) *de **4**;* **b)** *de **6**;* **c)** *de **8**;* **d)** *de **9**;* **e)** *de **18**;* **f)** *de **36***

9. Hallar todos los posibles valores de las letras en cada caso para que se cumpla que:
a) 4*m*68 sea múltiplo de **9**
b) 98*n* sea múltiplo de **6**
c) 58b7*a* sea múltiplo de **18**
d) 8*m*56*n* sea múltiplo de **36**
e) 3*r*33*t* sea múltiplo de **12**

Volvamos ahora a la *condición* 3 para descomponer un número en sus factores primos: Utilizar algún artefacto o formato para ir escribiendo la descomposición factorial. Primero necesitamos ir obteniéndolos. Para ello, si el número no es muy grande, puede hacerse mentalmente y por pasos, y escribir el resultado. Por ejemplo, $24 = 4 \times 6 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$, es decir: $24 = 2^3 \times 3$. O bien, $42 = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7$.

También puede ayudarnos la disposición habitual de la línea vertical a cuyo lado derecho se van colocando los sucesivos divisores primos del número en cuestión. Por ejemplo:

56	2	220	2	108	2
28	2	110	2	54	2
14	2	55	5	27	3
7	7	11	11	9	3
1		1		3	3
				1	

$56 = 2^3 \times 7 \quad 220 = 2^2 \times 5 \times 11$

$108 = 2^2 \times 3^3$

4.2. Los divisores de un número: cuáles y cuántos

Una vez obtenida la descomposición de un número en sus factores primos, podemos abordar el punto de cómo conseguir de una manera práctica *todos los divisores de un número dado*. Tomemos, por ejemplo, el número 72. Una forma de hacerlo es sacar los divisores por parejas de factores cuyo producto es 72, utilizando los criterios de divisibilidad en cada paso (o la calculadora...). Así:

- $72 = 1 \times 72$ (obviamente)
- 72 es múltiplo de 2 (acaba en cifra par) y $72 : 2 = 36$. Luego, $72 = 2 \times 36$
- 72 es múltiplo de 3 (ya que $7 + 2 = 9$) y $72 : 3 = 24$. Luego, $72 = 3 \times 24$
- 72 es múltiplo de 4, y $72 : 4 = 18$. Luego, $72 = 4 \times 18$
- 72 es múltiplo de 6 (lo es de 2 y de 3) y $72 : 6 = 12$. Luego, $72 = 6 \times 12$
- 72 es múltiplo de 8, y $72 : 8 = 9$. Luego, $72 = 8 \times 9$

Ahora es cuestión de ordenar los resultados: D(72) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}[D(72) indica el conjunto de los divisores de 72].

Otra forma de obtener los divisores de 72 es a partir de su descomposición en factores primos: $72 = 2^3 \times 3^2$. Colocamos en la 1ª fila la unidad y las sucesivas potencias de uno de los factores primos (1, 2, 4, 8). Luego multiplicamos esa fila por cada una de las potencias del otro factor primo (3 y 3^2). Así, los divisores de 72 aparecen de esta manera:

La unidad y las potencias de 2 hasta 2^3:	1	2	4	8
1ª fila multiplicada por 3:	3	6	12	24
1ª fila multiplicada por 3^2:	9	18	36	72

Esta segunda modalidad parece más desordenada que la primera, pero nos permite responder rápidamente a una pregunta curiosa: *¿cuántos divisores tiene un número*? Obsérvese que los divisores se presentan aquí en un formato rectangular: el número total de divisores será igual al número de filas por el número de columnas presentes. En este caso, $3 \times 4 = 12$ divisores.

Obsérvese que, por la forma en que hemos construido el rectángulo anterior, el número de columnas es igual al número de elementos en la primera fila, y este número siempre es igual al exponente del factor primo inicial (2^3), más una unidad: $3 + 1$. Y el número de filas es igual al exponente del otro factor primo (3^2), más una unidad: $2 + 1$. Esta regla puede generalizarse al caso en que la descomposición presente más de dos factores primos.

Así, por ejemplo, si tomamos el número 60, cuya descomposición en factores primos (obténgala) es $2^2 \times 3 \times 5$, obtenemos los divisores: →

→

La unidad y las potencias de 2:	1	2	4
1ª fila multiplicada por 3:	3	6	12
1ª fila multiplicada por 5:	5	10	20
2ª fila multiplicada por 5:	15	30	60

El número de divisores podía haberse obtenido directamente multiplicando los exponentes de los factores primos de 60, aumentados todos previamente en una unidad: $(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 3 \times 2 \times 2 = 12$ divisores. Del mismo modo, el número $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ tiene $(1+1) \times (2+1) \times (2+1) = 2 \times 3 \times 3 = 18$ divisores (verifíquelo).

10. *De todos los números naturales de dos cifras, ¿cuál(es) es (son) el (los) que posee(n) más divisores?*

4.3. Las potencias desde el punto de vista de sus divisores

Esa es, pues, una de las ventajas de trabajar con la descomposición de un número en factores primos. Pero no es la única. También nos sirve para averiguar si un número es un cuadrado perfecto (los exponentes de todos los factores primos deben ser pares), o un cubo perfecto (los exponentes de todos los factores primos deben ser múltiplos de 3), etc. Ahora podemos resolver algunos de los ejercicios propuestos al comienzo del Cuaderno:

¿Cuál es el menor entero positivo por el que se debe multiplicar 504 para obtener como producto un cuadrado perfecto?

La descomposición de 504 en factores primos es: $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$. Para obtener ese cuadrado perfecto, todos los exponentes deben ser pares. Y para que sea el más pequeño, basta con multiplicar a 504 por 2 y por 7 para llegar a 7.056 que es $2^4 \times 3^2 \times 7^2$.

El producto de dos números es 504. Cada uno de ellos es divisible por 6, pero ninguno de ellos es 6. ¿Cuál es el mayor de estos dos números?

Empezamos a probar con 12; vemos que $504 : 12 = 42$, que también es divisible por 6. Si probamos con 18, el otro factor es 28; y con 24, el otro factor es 21. Pero ni 28 ni 21 son divisibles por 6. Por consiguiente, el mayor número es 42.

11. *Y este otro ejercicio para curiosos (y perseverantes): Halle los divisores de todos los números naturales del **2** al **15**. Obtenga ahora los cuadrados de tales números y halle también sus divisores. Cuente el número de divisores obtenidos en todos los casos. ¿Qué observa? ¿Qué clase de números son los que tienen tres divisores?*

4.4. Cómo averiguar si un número dado es primo o compuesto

A todo eso, nos queda por resolver una cuestión importante: *¿cómo averiguar si un número dado es primo?* La norma es intentar ver si es múltiplo de los números primos iniciales: 2, 3, 5, 7, etc. La pregunta ahora es: ¿hasta dónde se extiende esta averiguación? Recordemos cuando obteníamos los divisores de 72 por parejas de factores cuyo producto era 72: 1×72, ..., 6×12, 8×9. Los primeros factores de cada pareja iban en aumento (1, 2, 3,...) hasta llegar a 8; si hubiéramos seguido, el siguiente primer factor hubiera sido 9, que ya había aparecido en la pareja 8×9. Ahí se detenía la búsqueda.

Tomemos, por ejemplo, el número 997: ¿es un número primo? Podemos utilizar los criterios de divisibilidad y la calculadora para ayudarnos a responder la pregunta: no es divisible por 2, 3 y 5 (según los criterios), ni por 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 (calculadora). En estas últimas divisiones vamos observando los cocientes; así, para 997 : 31 vemos que el cociente es 32,1... Al pasar a ensayar la división con el siguiente número primo, 37, la división 997 : 37 nos da como resultado 26,9... Ya no hay que seguir la búsqueda, porque nunca podrá aparecer como cociente entero alguno de los factores primos menores ya utilizados: si fuera así, la división del número entre ese factor primo hubiera sido exacta.

En resumen, la búsqueda se detiene, o bien porque alguna de las divisiones es exacta y el número se revela como compuesto, o bien en el momento en que, en la sucesión de divisiones inexactas, la parte entera del cociente es menor que el divisor. De modo que, en nuestro ejemplo, 997 es primo.

*Halle todas las parejas de números primos cuya suma es **999**.*

Los posibles sumandos deben ser uno par y otro impar. Evidentemente, sólo hay un primo par, el 2, por lo que si existe tal pareja debe ser la compuesta por 2 y 997. Y acabamos de ver que 997 es primo. No puede haber otra pareja.

5. El máximo divisor común de varios números

Una de las situaciones curiosas es observar que hay números que comparten uno o varios divisores. Por ejemplo, dos números seguidos sólo comparten un divisor: el 1 (compruébelo...); todos los productos de la tabla de multiplicar del 5 comparten el 1 y el 5 como divisores; 12 y 18 comparten los divisores 1, 2, 3 y 6 (verifíquelo). Así, podemos hablar de *divisores comunes a varios números*.

En este punto, una de las preguntas que podemos formularnos es acerca de cuál es el menor divisor común de dos números, así como de cuál es el mayor divisor común de dos números. A la primera parte respondemos que el 1, y no hay más que decir. La segunda parte sí se presta a más consideraciones.

El mayor de los divisores comunes de dos números se denomina *máximo divisor común* de esos números. Seguramente algún(a) lector(a) estará corrigiendo la expresión para traer la de "máximo común divisor", usualmente utilizada. Pero esta expresión no nos parece bien formulada; de hecho, ¿cuál(es) de esas tres palabras es (son) sustantivo(s) y cuál(es) adjetivo(s)? (piénselo antes de seguir...).

Ya debemos tener la respuesta: sólo hay un sustantivo (divisor) y dos adjetivos (máximo y común). En estos casos, lo habitual es colocar el sustantivo en el medio de la expresión, y los dos adjetivos, uno en cada extremo. La expresión más apropiada en castellano sería "máximo divisor común"; en cambio "máximo común divisor" parece responder mejor a la forma de construcción de la lengua inglesa... De todos modos, no vamos a hacer de esto un punto de honor, aunque sí utilizaremos la expresión que proponemos.

Un aspecto importante en este tema es la obtención del *máximo divisor común* [en adelante lo designaremos m.d.c.] de dos números. Hay varios procedimientos. El primero de ellos se ajusta literalmente al concepto expresado: el m.d.c. de dos números es *el mayor de los divisores comunes*. Por consiguiente, el procedimiento seguirá tres pasos: buscar los divisores de cada número, detectar los que son comunes y, finalmente, el mayor de estos últimos.

Así, por ejemplo, para hallar el m.d.c. de 42 y 18: D(42) = {1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42}; D(18) = {1, 2, 3, 6, 9, 18}. Divisores comunes: {1, 2, 3, 6}. El mayor de estos divisores: 6. Así, pues, m.d.c.(42, 18) = 6. Y para hallar el m.d.c. de 32 y 35: D(32) = {1, 2, 4, 8, 16, 32}; D(35) = {1, 5, 7, 35}. Divisores comunes: {1}. Por consiguiente, m.d.c.(32, 35) = 1.

Este sencillo procedimiento –muy útil cuando se trata de cantidades pequeñas– puede operarse mentalmente por la vía del ensayo y ajuste de la siguiente manera: tomamos los divisores del número menor de los dos dados: 18; ordenamos esos divisores de mayor a menor: 18, 9, 6, 3, 2, 1, y los vamos tomando de uno en uno en ese orden para probar si también resultan ser divisores del otro número. Así, 18, no es divisor de 42; 9, no es divisor de 42; 6, sí es divisor de 42. El primero que resulta divisor del otro número, es el m.d.c. de ambos, ya que es el mayor de los divisores comunes. En nuestro caso, m.d.c.(42, 18) = 6.

Dos observaciones muy pertinentes, antes de continuar con otros procedimientos: la operación de hallar el m.d.c. de dos números puede extenderse a tres o más números, del mismo modo como la suma se define al comienzo como una operación binaria (para dos sumandos) y luego se extiende a cualquier número de sumandos. Y en segundo lugar, en el caso en que el m.d.c. de dos números sea **1**, se dice que ambos números son *primos relativos*, o *coprimos*. Por ejemplo, **32** y **35** son primos relativos.

Una tercera forma de obtener el m.d.c. de varios números es por la vía de su descomposición en factores primos. Así, si $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ y $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ (hágalo), vemos que los factores primos comunes son **2** y **3**, y que sus *menores potencias de base común* son 2^2 (no se llega a 2^3 en **180**) y **3** (no se llega a 3^2 en **168**). Sabemos que su producto $2^2 \times 3$ también es divisor de **168** y de 180 –por consiguiente, es divisor común–; y fácilmente podemos inferir que es, además, el mayor posible. Así, concluimos que m.d.c.$(168, 180) = 2^2 \times 3 = 12$. De ahí se deduce la regla habitual: Descompuestos varios números en sus factores primos, su m.d.c. es *el producto de los factores primos comunes, tomados con su menor exponente*.

Existe una cuarta forma en que se procede a una *descomposición simultánea de varios números en divisores*, sin que éstos tengan que ser necesariamente primos. Así, por ejemplo, para hallar el m.d.c. de **630**, **180** y **1.170**, operamos así:

630	180	1.170	**10**	(es divisor común de los tres)
63	18	117	**9**	(es divisor común de los tres)
7	2	13	7	(sólo divide a **7**)
1			2	(sólo divide a **2**)
	1		13	(sólo divide a 13)
		1	1	

Como se ve, no hay que seguir un orden fijo en los divisores, sino el que más convenga en cada caso. Aquí, por ejemplo, la primera observación es que todos los números acaban en **0**, por lo que admiten a **10** como divisor común. Después notamos que la suma de los dígitos de los tres números es **9**, de donde deducimos que son múltiplos de **9**. Y no hay más divisores comunes. Así, m.d.c.$(630, 180, 1170) = 10 \times 9 = 90$.

Finalmente (por ahora...), hay una quinta forma de calcular el m.d.c. de dos números, conocida como *el algoritmo de Euclides*. Se basa en una propiedad ya observada: si un número es divisor de otros dos números, entonces divide a la diferencia entre el mayor y el menor [ejercicio propuesto 6. 3]. Así, si **15** divide a **270** y a **195**, también divide a $270 - 195 = 75$, y a cualquier múltiplo de **75**. Al aplicar estas propiedades reiteradamente puede hallarse el m.d.c. de dos números. Veámoslo con el mismo par de números, **270** y **195**:

	1	2	1	1	2
270	195	75	45	30	15
75	45	30	15	0	

El formato anterior arranca en la 2ª fila, colocando los números en cuestión, **270** y **195**. Se procede a su división: el cociente **1** se coloca encima de **195** y el resto, **75**, debajo de **270**. El m.d.c. de **270** y **195** –todavía sin calcular– debe dividir a ambos números y, por consiguiente, a su diferencia **75**. Ahora, este resto **75** pasa a la derecha de **195** y se establece una nueva división: **195** como dividendo y **75** como divisor. En esta división, el cociente **2** se escribe sobre **75** y el resto **45** (de $195 - 150$), debajo de **195**. Si el m.d.c. que se busca divide a **75**, divide también a **150** y, por ende, a la diferencia de 195 menos 150, que es 45.

Ahora se prosigue análogamente con 75 y 45 (nuevos dividendo y divisor), luego con 45 y 30 y, finalmente, con 30 y 15. El proceso se detiene al llegar a un resto nulo: el m.d.c. buscado es el último de los divisores de la cadena (2ª fila); en este caso, m.d.c.(270, 195) = 15. Este algoritmo es muy útil cuando se trata de obtener el m.d.c. de números grandes.

Tenemos, pues, hasta cinco alternativas diferentes para obtener el m.d.c. de varios números, cada una con sus pequeñas ventajas. Es conveniente saber manejarlas todas, y que sea la naturaleza de los números (pequeños o grandes; sólo dos o más de dos) y el estilo de cada quien, lo que determine la selección del procedimiento en cada caso.

De todas formas, resulta pertinente saber validar si el resultado a que se llegue en cada situación es el correcto. Una de las maneras de hacerlo es utilizar una vía distinta a la seguida previamente. Otro de los posibles criterios es calcular los cocientes de cada número entre el m.d.c. obtenido. Como es fácil de advertir, esos cocientes deben ser primos relativos (¿por qué?). Por ejemplo, en el caso de 270 y 195, los cocientes entre 15 son, respectivamente, 18 y 13, que son primos relativos.

Calcule, por la vía que desee, el m.d.c. de los siguientes números:
a) **32** y **72** **b)** **105** y **63** **c)** **24** y **25**
d) **1.001** y **143** **e)** **36, 84** y **204**
f) **72** y **175**
g) proponga otros casos y resuélvalos.

12. *Evalúe cada una de las siguientes afirmaciones como verdadera o falsa. Para ello, ayúdese con ejemplos, contraejemplos (para refutar), argumentos...:*

1- *Si dos números son primos, entonces son primos relativos.*
2- *Cualquier par de números naturales consecutivos son primos relativos.*
3- *Si dos números son primos relativos, entonces cada uno de ellos es primo.*
4- *Cualquier par de números impares consecutivos son primos relativos.*
5- *Si m.d.c.**(a, b) = m**, entonces los divisores de **m** dividen a **a** y a **b**.*
6- *Si m.d.c.**(a, b) = m**, entonces **m** divide a todos los divisores de **a** y de **b**.*
7- *Si m.d.c.**(a, b) = m**, entonces **m** divide a todos los múltiplos de **a** y de **b**.*
8- *Si m.d.c.**(a, b) = m**, entonces **m** es múltiplo de todos los divisores comunes de **a** y de **b**.*
9- *Si dos números se multiplican (o dividen) por un mismo número, el m.d.c. de ambos queda multiplicado (o dividido) por ese mismo número.*
10- *Si un número divide al producto de dos factores y es primo relativo con uno de ellos, necesariamente debe dividir al otro factor.*

6. El mínimo múltiplo común de varios números

Aunque no lo hayamos mencionado hasta ahora, el procedimiento para obtener los múltiplos de un número es muy sencillo: basta formar su tabla de multiplicar. Una forma práctica de hacerlo es sumando reiteradamente el número en la calculadora. En seguida apreciamos que, a diferencia del número de divisores de un entero positivo, el número de sus múltiplos es infinito.

En esta misma línea podemos observar que todo par de números enteros positivos posee siempre un número infinito de múltiplos comunes. En efecto, uno de éstos es el producto de ambos números, producto que, a su vez, tiene infinitos múltiplos. No tiene sentido, pues, preguntarse por el mayor de estos múltiplos comunes. Pero sí lo tiene preguntarse por el menor que no sea nulo (porque el 0 es múltiplo de todos los números), múltiplo que tiene su nombre: el menor de los múltiplos comunes de dos números se denomina *mínimo múltiplo común* de esos números (esta forma de llamarlo ya ha quedado justificada...).

Aquí también, un aspecto importante del tema es la *obtención del mínimo múltiplo común* [en adelante lo designaremos m.m.c.] de dos números. [Como en el caso del m.d.c., la operación de hallar el m.m.c. de dos números puede extenderse a tres o más números]. Hay varios procedimientos. El primero de ellos se ajusta literalmente al concepto expresado: el m.m.c. de dos números es *el menor de los múltiplos comunes*. Por consiguiente, el procedimiento seguirá dos pasos: buscar los múltiplos (los primeros...) de cada número y, en seguida, el primero que sea común.

Así, por ejemplo, para hallar el m.m.c. de **42 y 18: M(42) = {42, 84, 126, 168, 210, ...}**; **M(18) = {18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, ...}**. El primer múltiplo común: **126**. Así, pues, m.m.c.**(42, 18) = 126**.

Este sencillo procedimiento –muy útil cuando se trata de cantidades pequeñas– puede operarse mentalmente por la vía del ensayo y ajuste de la siguiente manera: tomamos, uno a uno, los múltiplos del número mayor de los dos dados (**42**), ordenados de menor a mayor: **42**, **84**, etc., para probar si también resultan ser múltiplos del otro número. Así, **42**, no es múltiplo de **18**; **84**, no es múltiplo de **18**; **126**, sí es múltiplo de **18**. El primero que resulta múltiplo del otro número, es el m.m.c. de ambos. En nuestro caso, m.m.c.**(42, 18) = 126**.

Una tercera forma de obtener el m.m.c. de varios números es por la vía de su descomposición en *factores primos*. Así, si $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ y $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$, vemos que un número que sea múltiplo de ambos debe poseer como factores, al menos, a 2^3 (y no solamente 2^2), 3^2 (y no sólo **3**), **5** y **7**. El producto de tales factores es el menor número que puede ser dividido exactamente por cada uno de los números dados. De ahí concluimos que $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$ es múltiplo de **168** y de **180** –por consiguiente, múltiplo común– y, además, el menor posible: m.m.c.$(168, 180) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2.520$. Así se llega a la regla habitual: descompuestos varios números en sus factores primos, su m.m.c. es *el producto de los factores primos comunes y no comunes, tomados con su mayor exponente*.

Existe una cuarta forma en que se procede a una descomposición simultánea de varios números en divisores, sin que éstos tengan que ser necesariamente primos. Así, por ejemplo, para hallar el m.m.c. de **630**, **180** y **1.170**, operamos como antes:

630	180	1.170	**10**	(es divisor común a los tres)
63	18	117	**9**	(es divisor común a los tres)
7	2	13	**7**	(sólo divide a **7**)
1			**2**	(sólo divide a **2**)
	1		**13**	(sólo divide a **13**)
		1	**1**	

Pero ahora multiplicamos todos los divisores, los comunes y los no comunes, para llegar al primer múltiplo común de los tres números dados: m.m.c.(630, 180, 1.170) = 10 x 9 x 7 x 2 x 13 = 16.380.

Finalmente, vamos a descubrir una regularidad que relaciona al m.d.c. y al m.m.c. de dos números. Para ello damos las siguientes parejas: 42 y 18; 32 y 72; 32 y 35; 15 y 60. Y vamos a calcular (hagámoslo) el m.d.c. y el m.m.c. de todas ellas. Colocamos los resultados en la siguiente tabla: →

a	b	a x b	m.d.c.(a, b)	m.m.c.(a, b)	m.d.c.(a, b) x m.m.c.(a, b)
42	18	756	6	126	756
32	72	2.304	8	288	2.304
32	35	1.120	1	1.120	1.120
15	60	900	15	60	900

La regularidad salta a la vista: en cada caso, hay dos columnas con valores idénticos. Por consiguiente:

$$a \times b = \text{m.d.c.}(a, b) \times \text{m.m.c.}(a, b)$$

Esta expresión nos permite obtener el valor de cualquiera de las cuatro variables, si conocemos el valor de las otras tres. Por ejemplo, si ya hemos calculado el m.d.c. de ***a*** y ***b***, tenemos una quinta manera de hallar su m.m.c.:

$$\text{m.m.c.}(a, b) = \frac{a \times b}{\text{m.d.c.}(a, b)}$$

Por otro lado, este resultado nos permite corroborar un par de intuiciones: primero, que si ***a*** es múltiplo de ***b***, entonces m.d.c. **(*a*, *b*) = *b***, y m.m.c. **(*a*, *b*) = *a***. Y, en segundo lugar, que si ***a*** y ***b*** son primos relativos (esto es, m.d.c.**(*a*, *b*) = 1**), su m.m.c. es igual a su producto. Y, a la inversa, que cuando el m.m.c. de dos números es igual a su producto, ambos son primos relativos.

Ojo: la expresión anterior, que relaciona los valores del m.d.c. y del m.m.c. de dos números, sólo es válida en ese caso. No puede generalizarse para el caso de relacionarse los valores del m.d.c. y del m.m.c. de más de dos números. Puede verificarlo tomando tres números, p. ej., **12**, **8** y **18**. Para ellos, su m.m.c. es **72** y su m.d.c. es **2**. Sin embargo, el producto de estos dos valores es **144**, mientras que el producto de los tres números dados es **1.728**.

Tenemos también, pues, varias alternativas diferentes para obtener el m.m.c. de varios números, cada una con sus pequeñas ventajas. Es conveniente saber manejarlas todas, y que sea la naturaleza de los números (pequeños o grandes; sólo dos ó más de dos) y el estilo de cada quien lo que determine la selección del procedimiento en cada caso.

De todas formas, resulta pertinente saber validar si el resultado a que se llegue en cada situación es el correcto. Una de las maneras de hacerlo es utilizar una vía distinta a la seguida previamente. Otro de los posibles criterios es calcular los cocientes del m.m.c. al dividirse entre cada número. Esos cocientes deben ser primos relativos (¿por qué?). Por ejemplo, en el caso de **42** y **18**, los cocientes de **126** (su m.m.c.) entre ellos son, respectivamente, **3** y **7**, que son primos relativos.

Calcule, por la vía que desee, el m.m.c. de los siguientes números:
a) 12** y **84** **b) 105** y **63** **c) 24** y **25
d) 1.001** y **143** **e) 36, 84** y **204
f) 72** y **175
***g)** proponga otros casos y resuélvalos.*

Los números 6, 14 y 15 son divisores de N. ¿Cuál puede ser el menor valor de N?

Obsérvese que, según el enunciado, **N** es un múltiplo común de los tres números. Además, debe ser el menor. Se trata, pues, de hallar su m.m.c., que es **210**.

*Si el precio de un objeto se puede pagar exactamente con sólo monedas de **20** pesos, y también con sólo monedas de **25** pesos, ¿se podrá pagar exactamente con sólo monedas de **50** pesos? ¿Y con sólo billetes de **200** pesos?*

El enunciado indica que el precio del objeto es múltiplo de 20 y de 25. El m.m.c. de ambos es 100. Por consiguiente, ese precio puede pagarse con sólo monedas o billetes de 100 pesos, y también con sólo monedas de 50, por ser 50 divisor de 100. Pero puede que no se pague con sólo billetes de 200 pesos (p. ej., si el precio es de 300 pesos...).

El m.d.c. de dos números es 5; su m.m.c. es 75. Si uno de los números es 15, ¿cuál es el otro?

De acuerdo con la última relación descubierta, $a \times b$ = m.d.c.(a, b) x m.m.c.(a, b). Por consiguiente, si llamamos b al número desconocido, $15 \times b = 5 \times 75$; es decir, $15 \times b = 375$. De donde: $b = 375 : 15 = 25$.

13. *Evalúe cada una de las siguientes afirmaciones como verdadera o falsa. Para ello, ayúdese con ejemplos, contraejemplos (para refutar), argumentos...:*

1- *Si dos números son primos relativos, entonces su m.d.c. es el menor de ellos.*
2- *Si dos números son primos relativos, entonces su m.m.c. es el mayor de ellos.*
3- *El m.d.c. de dos números es divisor del m.m.c. de ambos números.*
4- *Si **m.m.c.(a, b) = m**, entonces los divisores de **m** dividen a **a** y a **b**.*
5- *Si **m.m.c.(a, b) = m**, entonces los divisores de **a** y **b** dividen a **m**.*
6- *Si **m.m.c.(a, b) = m**, entonces **m** divide a todos los múltiplos de **a** y de **b**.*
7- *Si **m.m.c.(a, b) = m**, entonces los múltiplos de **a** y de **b** dividen a **m**.*
8- *Si **m.m.c.(a, b) = m**, entonces **a** y **b** dividen a todos los múltiplos de **m**.*
9- *Si dos números se multiplican (o dividen) por un mismo número, el m.m.c. de ambos queda multiplicado (o dividido) por ese mismo número.*

7. La resolución de problemas en el campo de la divisibilidad

En el campo de la divisibilidad, los problemas pueden ser muy variados, aunque en buena parte se refieren a regularidades o características que presentan algunos números, o a relaciones entre ellos. También los hay que aluden a situaciones de la vida diaria. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Lo que sugerimos a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia antes de revisar la vía de solución que se presenta posteriormente.

a) *Hallar una lista de **10** enteros consecutivos que sean compuestos.*

b) Si se divide cierto número por **6**, se obtiene **4** como resto. Pero si se divide por **5**, el resto disminuye en **1** y el cociente aumenta en **1**. ¿Cuál es el número?

c) *¿De cuántas maneras puede escribirse **60** como producto de tres números diferentes?*

d) ¿Cuál es el mayor número posible tal que, al dividirse **247**, **367** y **427** entre ese número, se obtiene **7** de resto en todos los casos?

e) *Atención: **45**, **150**, **105**, **30** y **90** son "plikos". Pero **24**, **50**, **18**, **125**, **66**, **6** y **80** no son "plikos". ¿Cuáles de los siguientes números: **40**, **75**, **120**, **36**, **60**, **96** y **135** son "plikos"?*

f) Tome un número de tres cifras. Escríbalo de nuevo, a continuación del anterior, para formar un número de seis dígitos. Divídalo entre **7**, **11** y **13** y observará que las tres divisiones son exactas. Y así con cualquier otro número de tres cifras. ¿Por qué?

g) *El número **N** es la cuarta potencia de otro número. **N** tiene a **18** como divisor. ¿Cuál es el menor valor que puede tener el cociente de **N** entre **18**?*

h) En un abasto hay menos de **400** huevos

para la venta. Si se colocan en envases de **1** docena, **1** docena y media, **2** docenas, y **2** docenas y media, siempre sobran **3** huevos. ¿Cuántos hay?

i) *Un número se divide entre **7** y da como resto **5**. ¿Cuál será el resto que se obtiene al dividir el triple de ese número entre **7**?*

j) En cada una de las 9 casillas libres coloque uno de los dígitos del 1 al 9 de tal forma que los productos horizontales coincidan con los valores de la derecha y los productos verticales, con los valores inferiores:

			70
			48
			108
64	45	126	■

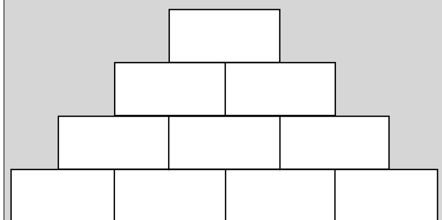
k) *Hallar un número menor que **30** que sea simultáneamente múltiplo de **2**, de **3** y de **5**.*

l) En la siguiente distribución:

A   **D**
B **G** **E**
C   **F**

cada letra esconde un dígito diferente. Averigüe cuáles son si se cumple que los tres productos: **AxBxC**, **BxGxE** y **DxExF** son iguales.

m) *El dibujo que sigue representa una "pirámide numérica". En ella, cada sector o cuadrícula tiene asignado un número natural. Salvo en la fila de la base, este número se obtiene multiplicando los números de los dos sectores del piso inferior que le sirven de apoyo. Coloque los dígitos **1**, **2**, **3**, y **4** en la fila de la base, de tal forma que obtenga el mayor producto posible en la cuadrícula superior*



n) Determinar el mayor número natural tal que cuando divide a **364**, **414**, y **539**, deja el mismo resto en los tres casos.

ñ) *Rosaura tiene tres hijos. El producto de sus edades es **200**. La edad del mayor es el doble de la del segundo hijo. ¿Cuántos años tiene cada hijo?*

o) Nidia y su abuela cumplen años el mismo día. Durante **6** cumpleaños consecutivos la edad de la abuela ha sido múltiplo de la edad correspondiente de Nidia. ¿Cuántos años tiene ahora Nidia, un día después del último de estos seis cumpleaños?

p) *Al sumar dos números de dos dígitos cada uno, **a2** y **b4**, se obtiene un número múltiplo de **3**. ¿Cuál es el menor valor que puede tener la suma **a + b**?*

q) Halle **3** números cuyo m.m.c. sea **48**.

r) *Halle los números de todos los años del segundo milenio tales que la suma de sus dígitos sea **21**, y su producto, **162**.*

s) Beatriz guarda en su alcancía menos de **100** monedas. Al sacarlas observa que si las agrupa en montones de **2**, **3**, **4**, **5** y **6** monedas, le sobran, respectivamente, **1**, **2**, **3**, **4** y **5** monedas. ¿Cuántas le sobrarán si las pone en montones de **7** monedas?

t) *¿Cuál es el mayor número escrito con nueve dígitos diferentes (excluido el **0**) que es múltiplo de **18**?*

u) Se desea pavimentar un piso con baldosas rectangulares de **30 cm x 40 cm**, colocadas todas en el mismo sentido. ¿Cuál es el menor número de baldosas necesarias para formar un cuadrado pavimentado?

v) *Tres amigos, cuyas edades pasan de* ***19*** *años, nos indican que el producto de sus edades es* ***17.710****. ¿Cuántos años tienen?*

w) Coloque en la tabla siguiente los dígitos del **1** al **9** (uno en cada casilla)

de manera que el número formado por los dígitos de las casillas:
1 y **2** sea divisible por **2**
2 y **3** sea divisible por **3**
3 y **4** sea divisible por **4**
………………………..
8 y **9** sea divisible por **9**

x) *Ramón borra accidentalmente una división. Pero recuerda que los sucesivos sustraendos eran, de arriba hacia abajo,* ***690****,* ***2.415****, y* ***3.105****; y que el resto final era* ***1****. ¿Cuáles eran el dividendo, el divisor y el cociente de la división?*

Vamos, pues, a reportar algunas vías de solución para poder contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a) La tarea es un poco tediosa, pero no difícil. Hay que buscar la tabla de números primos y observar dónde aparece un "salto" de **11** unidades (al menos) entre dos primos consecutivos. Esta situación se presenta por primera vez entre los números primos **199** y **211**. La lista de los **11** enteros consecutivos es: **200**, **201**, ..., **210**. La siguiente secuencia (también de **11** números) va de **212** a **222**.

b) En primer lugar, podemos formar el conjunto de los números que dan resto **4** al dividirse entre **6**: {**4**, **10**, **16**, **22**, **28**, **34**, **40**, ...}. Y ahora observamos cuál de estos números, al dividirse entre **5**, arroja un cociente una unidad superior y un resto una unidad inferior a los que se obtienen al dividirse por **6**. El ensayo nos lleva al número **28**.

c) Se trata de tener a la mano todos los divisores de **60**: **D(60) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}**. Y de organizarlos ordenadamente en ternas de factores diferentes cuyo producto sea **60**. Estas ternas son: **1 x 2 x 30**, **1 x 3 x 20**, **1 x 4 x 15**, **1 x 5 x 12**, **1 x 6 x 10**, **2 x 3 x 10**, **2 x 5 x 6**, **3 x 4 x 5**.

d) Si al dividirse **247**, **367** y **427** entre el número que buscamos, da siempre resto **7**, esto significa que **240**, **360** y **420** son múltiplos de tal número. Por consiguiente, este número es un divisor de los tres (común), y, además, nos piden que sea el mayor posible. Se trata, pues, del máximo divisor común de **240**, **360** y **420**. Y este número es **60**.

e) Sabemos que **45**, **150**, **105**, **30** y **90** son "plikos", pero que **24**, **50**, **18**, **125**, **66**, **6** y **80** no son "plikos". Para responder a la pregunta: ¿cuáles de los siguientes números: **40**, **75**, **120**, **36**, **60**, **96** y **135** son "plikos"?, necesitamos saber qué es un "pliko". Es decir, qué característica tienen en común los números del primer grupo, que no sea poseída por ninguno de los del segundo grupo.

Pueden formularse, de entrada, muchas hipótesis, que se deben ir contrastando con el criterio anterior. Por ejemplo, "son números entre **30** y **150**... (rechazada: también los hay en el segundo grupo); "acaban en **0** ó en **5**: son múltiplos de **5**" (rechazada: **50**, **125** y **80** están en el segundo grupo); "son múltiplos de **3**" (rechazada: **24**, **18**, **66** y **6** también lo son y están en el segundo grupo).

Pero profundizando por esta línea podemos percatarnos de que todos los números del primer grupo son múltiplos de **15**, y que no hay ninguno del segundo grupo que lo sea: hemos hallado la característica de los "plikos". Por consiguiente, los "plikos" del tercer grupo son los múltiplos de **15**, es decir, **75**, **120**, **60** y **135**.

f) Por ejemplo, **217**. Formamos el número **217.217**. Y, efectivamente, es divisible por **7**, por **11** y por **13**. Y así ocurre con cualquier otro construido de la misma forma. ¿Por qué? Veamos: podemos descomponer **217.217** en **217.000 + 217**. Y ahora, podemos aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma:

217.217 = 217.000 + 217 = 217 x (1.000 + 1) = 217 x 1.001

Por consiguiente, **217.217** (y cualquier otro número construido de la misma forma) es divisible por **1.001**. Ahora bien, si descomponemos **1.001** en sus factores primos, obtenemos: **1.001 = 7 x 11 x 13**. Por consiguiente, **217.217** (y cualquier otro número construido de la misma forma) es divisible por **7**, por **11** y por **13**.

g) Si **N** es la cuarta potencia de otro número, la descomposición factorial de **N** debe estar constituida por factores primos (uno solo o varios) cuyos exponentes deben ser múltiplos de **4**. Por ejemplo, **N** podría ser 2^8, $3^4 \times 5^8$, ó $7^4 \times 11^4 \times 3^8$. Pero si es divisible por **18** (que es 2×3^2), esto nos indica que **2** y **3** son factores primos propios de **N**. Así, el número más pequeño que puede ser **N** es $2^4 \times 3^4$. Por consiguiente, el menor valor posible para **N/18** es: $(2^4 \times 3^4) / (2 \times 3^2) = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$.

h) Los envases en que se colocan los huevos tienen como capacidad: **12**, **18**, **24** y **30**. Si al colocarse los huevos en cartones de cada tipo siempre sobran **3**, está claro que al quitarse **3** huevos del número total se obtendría un múltiplo de cada una de las capacidades. Para buscar los posibles múltiplos comunes, hallamos primero el menor de ellos: **m.m.c.(12, 18, 24, 30) = 360**. Los demás serían: **720**, **1.080**, etc. Pero estos últimos superan a **400**. Por consiguiente, en el abasto hay **360** + **3** = **363** huevos.

i) Ensayemos con algunos casos concretos. Si el número es **12** (da de resto **5** al dividirse entre **7**), su triple (**36**) da de resto **1** al dividirse también entre **7**. Si el número es **19**, el resto de su triple (**57**), al dividirse entre **7**, es también **1**. Puede verificarse con otros casos análogos y siempre el resto será **1**.

La razón es que esos números (los llamaremos **N**) están formados por dos sumandos: uno que es múltiplo de **7** (de la forma **7 x *k***, donde ***k*** es un número natural) y otro, que es **5**. Es decir, **N = 7 x k + 5**. Así, **12 = 7 x 1 + 5**; **19 = 7 x 2 + 5**. En estas condiciones, el triple de **N** será el triple de **7 x *k***, más el triple de **5**, que es **15**. Obsérvese que el triple de **7 x *k*** sigue siendo un múltiplo de **7**, y que **15** es un múltiplo de **7** (**14**) más **1**. En definitiva, el triple de **N** es un nuevo múltiplo de **7**, más una unidad. Así, pues, al dividirse el triple de **N** entre **7**, el resto que se obtendrá será siempre **1**.

j) Aquí lo fundamental es observar los productos en los márgenes derecho e inferior. Así, en la 1ª fila deben estar los dígitos **5** y **7** para poder dar **70** como producto. Además, **5** debe hallarse en la 2ª columna y **7** en la 3ª (por los productos inferiores **45** y **126**, respectivamente). De todo esto surge la 1ª fila: **2**, **5** y **7** (en ese orden). Por otro lado, la 1ª columna no debe llevar dígitos múltiplos de **3** (**3**, **6** ó **9**), ya que el producto es **64** (sólo deben estar el **4** y el **8**). Pero el **8** no puede estar en la 3ª fila, ya que **108** no es múltiplo de **8**. El **9** tampoco puede estar en la 2ª fila, ya que el producto es **48**, que no es múltiplo de **9**. Todo esto lleva a la siguiente configuración de la tabla:

2	5	7	70
8	1	6	48
4	9	3	108
64	45	126	

¿Es usted capaz de elaborar un ejercicio similar al propuesto?

k) Si el número es, simultáneamente, múltiplo de **2**, de **3** y de **5**, ha de ser múltiplo de su mínimo múltiplo común, que es **30**. Pero la condición de que sea menor que **30** reduce las posibilidades al caso de **0**, que es también un múltiplo común de los tres números dados.

l) Antes de ensayar con cualesquiera dígitos, debemos observar la distribución propuesta. Inmediatamente se percibe que **B** y **E** son los dígitos clave, pues forman parte de dos productos cada uno, cosa que no ocurre con los demás. Por otro lado, debemos pensar en los tres dígitos –sólo usamos siete– que no pueden aparecer en esta configuración. Ellos son el **0**, el **5** y el **7**, ya que su presencia no es posible, simultáneamente, en los tres productos –a lo sumo en dos–, con lo que éstos dejarían de ser todos iguales. En efecto, si uno o dos productos son múltiplos de **5** (o de **7**, o nulos), el (los) restante(s) no podría(n) serlo. Debemos trabajar, pues, con los factores **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, **8** y **9**.

Otro elemento en el que debemos pensar ahora es en el posible valor común del producto de las ternas de factores. Ese producto debe ser múltiplo de todos los dígitos implicados. Esto nos lleva a deducir que el producto debe ser **72**, ya que otro múltiplo no común (como **36**, **54** ó **108**) no nos serviría, y un múltiplo mayor de **72** (como **144**) resultaría excesivamente grande.

El problema está ahora en cómo distribuir los dígitos para obtener **72** como producto. Un punto de partida puede ser pensar en una terna que necesariamente debe aparecer: **9**, **8**, **1**. La pregunta es: ¿en qué orden y en qué lugar? El lector puede comprobar que no puede figurar como **B G E** –en ningún orden de los factores– pues no permite lograr los productos "verticales" iguales a **72**. Por consiguiente, la terna **9**, **8**, **1** es "vertical" (supongamos que es **D E F**). ¿Cuál de los tres dígitos ocupa el lugar clave de **E**? Por ensayo y ajuste (puede comprobarlo) se llega a determinar que debe ser el **9**. A partir de aquí se derivan las posiciones de **4** y **2** en los lugares **B** y **G**, respectivamente. Los dígitos **6** y **3** pueden ocupar las posiciones **A** o **C**.

Así que una de las distribuciones posibles es:

6		**8**
4	**2**	**9**
3		**1**

m) Esta situación sugiere el uso de la estrategia de ensayo y ajuste porque, como habrá observado el(la) lector(a), no es indiferente el orden en que se coloquen los cuatro dígitos en la fila de la base. Por ejemplo, si se ordenan –de izquierda a derecha– **2**, **3**, **1** y **4**, los valores de la siguiente fila serán: **6**, **3** y **4**. Pero si se hubieran ubicado en el orden **1**, **4**, **2** y **3**, tales valores serían: **4**, **6** y **8**, cuyos productos son superiores a los del primer caso.

La lógica sugiere colocar los factores **3** y **4** al centro. Y se observa que resulta indiferente poner el **1** en cualquiera de los dos extremos de la fila. Así se llegaría a una disposición óptima como la siguiente:

	3.456		
48		**72**	
4	**12**	**6**	
1	**4**	**3**	**2**

n) Este ejercicio difiere un poco del ejercicio **d)** resuelto anteriormente. Allí se sabía que el resto común era **7**, mientras que ahora no se conoce tal resto. Llamémosle ***r***. Entonces, los números **364 –** ***r***, **414 –** ***r***, y **539 –** ***r*** son divisibles por nuestro número desconocido. Evidentemente, se trata de encontrar el mayor divisor común de esos tres números, pero al no saber su valor numérico, no podemos proceder como en **d)**.

Sin embargo, podemos utilizar otra propiedad de los divisores: si un número divide a varios números, entonces divide también a su diferencia. En este caso, nuestro número desconocido dividirá a las tres diferencias posibles entre esos tres números: a [**(539 –** *r***) – (364 –** *r***)**], a [**(539 –** *r***) – (414 –** *r***)**] y a [**(414 –** *r***) – (364 –** *r***)**]. Es decir, a **(539 – 364)**, a **(539 – 414)** y a **(414 – 364)**. O, lo que es lo mismo, a **175**, a **125** y a **50**. Buscamos, pues, el m.d.c.(**175**, **125**, **50**), que es **25**. Puede verificarlo y, de paso, hallar el valor del resto ***r***

ñ) Sabemos que el producto de tres factores es **200**. Para tener una idea de cuáles pueden ser, hallemos los divisores de **200**: **D(200) = {1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200}**. Hemos de tener en cuenta dos condiciones: se trata de edades de hijos (no pueden ser números muy grandes), y la edad del mayor es **el doble** de la edad del segundo hijo. Esta situación nos lleva a dos posibles ternas de edades: **20**, **10**, **1** y **10**, **5**, **4** años. Quizá resulta más habitual la segunda terna, pero nunca se sabe... Hay, pues, dos respuestas posibles.

o) De entrada y para entender el problema, podemos pensar que Nidia acaba de cumplir, por ejemplo, **11** años. Esto significa que la edad actual de su abuela es múltiplo de **11**. La de hace un año, debía ser múltiplo de **10**; la de hace dos, múltiplo de **9**; y así sucesivamente, hasta llegar a que la edad de hace **5** años debía ser múltiplo de **6**. El problema está en encontrar una secuencia de **6** edades consecutivas de la abuela que satisfagan esa condición de ser, respectivamente, múltiplos de **6**, **7**, **8**, **9**, **10** y **11**.

Todo lo anterior es válido si Nidia acabara de cumplir **11** años. Pero de momento no sabemos si habrá cumplido más o menos años que **11**. Lo que sí observamos es que "no nos interesa" que haya cumplido "muchos" años, porque entonces las exigencias para las sucesivas edades de la abuela son muy "fuertes"; véase, por ejemplo para el caso de **11** años, que la secuencia de edades consecutivas de la abuela debe ser: un múltiplo de **6**, uno de **7**, uno de **8**, etc. Y esto no es fácil de satisfacer (de hecho, no existe esa secuencia).

Por eso, es preferible empezar el ensayo suponiendo que Nidia acaba de cumplir **6** años (que es lo mínimo permitido en el problema), con lo que su secuencia de años cumplidos es **1**, **2**, **3**, **4**, **5** y **6**. Entonces, la secuencia de edades consecutivas de la abuela debe ser: un múltiplo de **1**, uno de **2**, uno de **3**, uno de **4**, uno de **5**, y uno de **6**. Si nos fijamos en las dos últimas condiciones (dos números seguidos, uno múltiplo de **5** y el siguiente, múltiplo de **6**), encontramos los posibles pares: **5** y **6**; **35** y **36**; **65** y **66**; **95** y **96**, etc. Por la relación de abuela-nieta, nos quedamos con los pares **65** y **66**, y **95** y **96**.

En el primer caso, la secuencia numérica de las seis edades de la abuela serían: **61**, **62**, **63**, **64**, **65** y **66**. Secuencia que cumple las condiciones iniciales: **61** es múltiplo de **1**; **62**, de **2**; **63**, de **3**; **64**, de **4**; **65**, de **5**; y **66**, de **6**. En cambio, en la otra secuencia (**91**, **92**, **93**, **94**, **95** y **96**) no se cumple que **94** sea múltiplo de **4** [Trate de probar con otras posibles edades de Nidia...].

p) La suma de los dígitos de ambos números es $a + b + 2 + 4$, es decir, $a + b + 6$. Si la suma es múltiplo de **3**, entonces $a + b + 6$ debe ser también múltiplo de **3**. Por lo que el valor mínimo de $a + b$ debe ser **3** (no puede ser **0**, ya que entonces a y b deberían ser **0**, y no tendríamos sumandos de dos dígitos).

q) Puede haber muchas ternas de números cuyo mínimo múltiplo común es **48**. La condición que debe cumplirse necesariamente es que los tres números sean divisores de **48**. [Una manera fácil de conseguir esas ternas es juntando el propio número **48** con otros dos divisores de **48**. Por ejemplo, (**1**, **1**, **48**), (**2**, **6**, **48**), (**12**, **16**, **48**), etc.]. Pero no basta que los números de la terna sean divisores de **48**, pues podría tratarse de (**2**, **4**, **6**), cuyo m.m.c. es **12**. Lo que se requiere es que entre los tres números aparezcan los factores en que se descompone **48**, que son $\mathbf{2^4}$ y **3**. Es decir, que en alguno de los números de la terna aparezca $\mathbf{2^4}$, que en algún otro (o en el mismo anterior) aparezca **3**, y que el tercero sea cualquier divisor de **48**. Por ejemplo, (**16**, **3**, **24**), (**16**, **12**, **6**), etc.

r) Como se trata de un año del segundo milenio, ya sabemos que empieza por **1**. Ahora tenemos que hallar tres dígitos cuyo producto es **162** y cuya suma es **21 – 1 = 20**. Para ello buscamos, entre los divisores de **162**, los que constan de un solo dígito. Ellos son: **1**, **2**, **3**, **6**, y **9**. Hay dos posibles ternas cuyo producto es **162**: (**2**, **9**, **9**) y (**3**, **6**, **9**). Pero la suma de los dígitos de la segunda no es **20**. Por consiguiente, nos quedamos con la primera. Los números de los años buscados son: **1299**, **1929** y **1992**.

s) Desde luego, parece haber un patrón en la formación de los montones y en las monedas que van sobrando, por lo que el primer impulso nos lleva a decir que al poner las monedas en montones de **7**, van a sobrar **6** monedas. Pero no hay modo de sustentar esta respuesta, ya que no conocemos el total –lo llamaremos N– de monedas presentes. Así, pues, habrá que intentar otro camino.

En primer lugar, debemos observar bien las condiciones impuestas. Y las vamos a identificar, para manejarlas con mayor soltura:

- ***a.*** al poner las monedas en montones de **2**, sobra **1** moneda
- ***b.*** al poner las monedas en montones de **3**, sobran **2** monedas
- ***c.*** al poner las monedas en montones de **4**, sobran **3** monedas
- ***d.*** al poner las monedas en montones de **5**, sobran **4** monedas
- ***e.*** al poner las monedas en montones de **6**, sobran **5** monedas

Algunas de esas condiciones aportan datos inmediatos. Por ejemplo, ***a*** nos indica que **N** es impar. Esto nos llevaría a probar las demás condiciones sólo con los números impares menores que **100**. La estrategia ahora consiste en observar bien el conjunto de las condiciones, con el fin de seleccionar en primer lugar aquella que reduzca al máximo el conjunto inicial de posibles respuestas.

El ensayo nos lleva a considerar juntas las condiciones ***a*** y ***d***: los números impares tales que al dividirse entre **5** dan como resto **4**, son los que terminan en **9**, es decir: **9**, **19**, **29**, ..., **89** y **99**. Ahora podemos aplicar la condición ***b***, que nos reduce el conjunto anterior a **29**, **59** y **89**. Y, finalmente, la condición ***c***, que nos lleva al valor de **N**: **59** monedas. De paso, hemos comprobado que la condición ***e*** estaba de sobra... Así, pues, al poner las **59** monedas en montones de **7**, sobrarán **3** monedas (**59 = 7 x 8 + 3**).

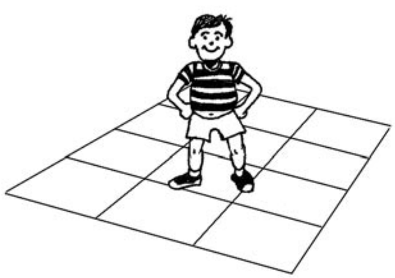
Hay otra manera de pensar la solución. Si revisamos las condiciones anteriores, vemos que todas podrían haberse reducido a una sola: al ponerse en montones de **2**, **3**, **4**, **5** y **6** monedas, siempre "falta 1 moneda". Es decir que si se tratara de **N + 1** monedas, se obtendrían distribuciones en montones exactos. Esto significa que **N + 1** es un múltiplo común de **2**, **3**, **4**, **5** y **6**. Pues bien, como m.c.m.(**2**, **3**, **4**, **5**, **6**) = **60**, los posibles valores de **N + 1** son **60**, **120**, **180**, etc. Pero como en la alcancía hay menos de **100** monedas, debemos quedarnos con el primer valor: **N + 1 = 60**, de donde se desprende que **N = 59**.

t) El número que nos solicitan ha de ser múltiplo de **18**, es decir, de **2** y de **9**. Ha de ser par y, además, múltiplo de **9**. Ahora, si nos fijamos bien, cualquier número de nueve dígitos escrito con los dígitos del **1** al **9** sin repetir y en cualquier orden, es múltiplo de **9**, ya que la suma **1 + 2 + ... + 8**

+ 9 = 45 (múltiplo de **9**). Por consiguiente, el mayor de esos números múltiplos de **9** sería: **987.654.321**. Pero este número es impar. Para conseguir el mayor par, basta con cambiar de orden los dos últimos dígitos, **1** y **2**. Y así obtenemos el número pedido: **987.654.312**.

u) Un cuadrado pavimentado con estas baldosas presentará alineadas, en el lado que podemos designar como "base" del cuadrado, las aristas correspondientes a una de las dos dimensiones de cada baldosa (por ejemplo, **40** cm). Y en el lado que podemos designar como "altura" del cuadrado, las aristas correspondientes a la otra dimensión de la baldosa (**30** cm). Pero como se trata de un cuadrado, las longitudes de esa "base" y de esa "altura" deben ser iguales.

Esto implica que las medidas **30** y **40** son ambas divisores de tal longitud. O, en otras palabras, que esta longitud debe ser un múltiplo común de **30** y de **40**. Pero como nos solicitan el menor de tales cuadrados, el problema se resuelve obteniendo el mínimo múltiplo común de ambos números: **m.m.c.(30,40) = 120**. El cuadrado pavimentado tendrá un lado de longitud **1,20** m y contendrá **12** (**3 x 4**) baldosas.



v) Se trata de hallar **tres** factores (mayores que **19**) cuyo producto sea **17.710**. Para obtenerlos, buscamos su descomposición en factores primos: **17.710 = 2 x 5 x 7 x 11 x 23**. Ahora debemos reducir esa multiplicación a sólo **tres** factores mayores que **19**. La única terna posible (puede verificarse) es: **22** (**11 x 2**), **35** (**5 x 7**) y **23**.

w) Para ubicar los dígitos del **1** al **9** de la forma solicitada, podría procederse de izquierda a derecha, tratando de cumplir paso a paso las condiciones exigidas: que el número formado por los dígitos de las casillas **1** y **2** sea divisible por **2**, que el formado por los dígitos de las casillas **2** y **3** sea divisible por **3**, etc. Al comienzo puede resultar sencillo, pero luego podemos llegar a callejones sin salida.

Por eso, hay que proceder con cautela. Por ejemplo, preguntarnos si hay algunos dígitos "condenados" a ocupar determinadas posiciones. Y la respuesta es que sí: los dígitos pares han de ocupar las casillas pares (de izquierda a derecha) y, sobre todo, el **5** debe ocupar la 5ª casilla (única alternativa para que el número formado por los dígitos de las casillas **4** y **5** sea divisible por **5**). Colocamos el **5** en la 5ª casilla.

Nos preguntamos qué dígito puede figurar en la 6ª casilla para que se cumpla la condición correspondiente; y vemos que sólo puede estar el **4** (**54**, divisible por **6**). Para la casilla **7** pudieran entrar el **2** y el **9** (**42** y **49** son los dos múltiplos de **7** que empiezan por **4**), pero no podemos utilizar el **2** (porque es par), por lo que se queda el **9**. Para la 8ª casilla sólo es posible ubicar el **6** (**96** es múltiplo de **8**) y para la 9ª, el **3** (**63** es múltiplo de **9**).

De manera análoga hay que proceder con los dígitos para las cuatro primeras casillas. El resultado final es (en cada casilla se escribe, junto con cada cifra, el orden en que se va ubicando, de acuerdo con los criterios indicados):

1 ó **7** (9ª)	**8** (7ª)	**7** ó **1** (8ª)	**2** (6ª)	**5** (1ª)	**4** (2ª)	**9** (3ª)	**6** (4ª)	**3** (5ª)

x) Recuérdese que, en una división, los sustraendos son las cantidades que se van restando progresivamente. Así, por ejemplo, en la siguiente división:

```
   4 1 5 |1 8
 - 3 6    2 3
     5 5
   - 5 4
       1
```

los sustraendos son **36** y **54**. Cada sustraendo se obtiene al multiplicar la cifra que acaba de colocarse en el cociente, por el número que está en el divisor. Esto significa, entonces, que los sucesivos sustraendos: **690**, **2.415** y **3.105** se han obtenido al multiplicar la cantidad del divisor por un factor que, en cada caso, no puede tener más de un dígito. De modo que la cantidad del divisor es un "divisor" común de los tres números anteriores.

Se trata, pues, de hallar m.d.c.(**690**, **2.415**, **3.105**), que es **345**. Las posibles respuestas al problema están en el conjunto de los divisores de **345** (incluyendo al propio **345**), y la condición que deben cumplir es que deben multiplicarse por un factor de un solo dígito para obtener como productos, **690**, **2.415** y **3.105**. La búsqueda se reduce al propio **345**, ya que **690 = 345 x 2; 2.415 = 345 x 7; 3.105 = 345 x 9**, con lo que las cifras sucesivas del cociente son: **2**, **7** y **9** (con cualquier otro divisor menor de **345** –por ejemplo, con **115**– no se cumple la condición de un solo dígito como cociente al dividirse **690**, **2.415** y **3.105** entre ese divisor).

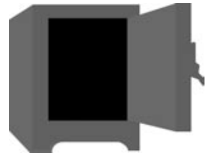
De modo que, en la división, el divisor es **345**, el cociente es **279**, y el dividendo es **345 x 279 + 1**, es decir, **96.256**. Podemos verificarlo.

8. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"...

Pero antes, la reflexión final. Tenemos que acostumbrarnos a ver los números en su dimensión multiplicativa, como descompuestos en factores y, sobre todo, en factores primos. Y a percibir las relaciones multiplicativas entre los números, como divisores y múltiplos unos de otros. Y todo ello guiados por la curiosidad. Y para ir alcanzando cierta familiaridad con los números. De esto se trata cuando hablamos de divisibilidad

14. *Si* ***A B A x A A = A A A A****, siendo* ***A*** *y* ***B*** *dígitos distintos, hallar el valor de* ***B****.*

15. La combinación para abrir un cofre es un número de **cinco** cifras



que, consideradas de izquierda a derecha, cumplen las siguientes condiciones: la 1ª cifra es par; la suma de las dos primeras es **15**; la 3ª es igual a la diferencia de las dos primeras (la mayor menos la menor); el número es múltiplo de **9**; la 1ª cifra es igual a la 1ª por la 4ª; todas las cifras son diferentes. ¿Cuál es el número de la combinación?

16. *Halle todos los divisores de* ***1.275.000*** *que sean cuadrados perfectos.*

17. Halle el número impar que es múltiplo de **9** y divisor de **72**.

18. *Se desea embaldosar un pasillo de* ***9,20*** *m de largo y* ***2,40*** *m de ancho con baldosas cuadradas de la mayor dimensión posible, de tal modo que quepan un número exacto de veces a lo largo y a lo ancho del pasillo. ¿Cuánto medirá el lado de la baldosa?*

19. Halle la capacidad de un tonel si es la menor que se puede llenar exactamente con botellas llenas de líquido de cada una de las siguientes capacidades: **60** cl, **90** cl, **1** l y **2** l.

20. *¿De cuántas maneras se pueden agrupar **36** alumnos en filas y columnas completas?*

21. El señor Pedro presume de ser joven. Para confirmarlo, nos dice que si su edad se divide entre **2**, **3**, **4**, **5** y **6**, siempre da como resto **1**. ¿Realmente es una persona joven?

22. *Una caja de base cuadrada tiene una altura cuya medida es el triple del lado de la base. Si el volumen de la caja es de **24.000** cm^3, ¿cuál es la altura de la caja?*

23. Consideremos la suma **N** de **cinco** números naturales consecutivos. Además de la unidad y de **N**, ¿qué otros dos divisores posee necesariamente **N** cada vez?

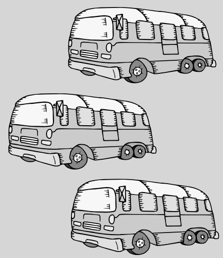
24. *El municipio posee tres lotes de terreno cuyas áreas son de **3.675** m^2, **1.575** m^2 y **2.275** m^2. Los tres lotes se tienen que dividir en parcelas menores, de igual área, para la construcción de viviendas. ¿Cuál es el mayor tamaño posible de estas parcelas?*

25. Usando los dígitos **3**, **4**, **6** y **8**, ¿cuántos números de **tres** cifras no repetidas pueden formarse, de tal modo que sean a la vez múltiplos de **4** y de **6**?

26. *Sea* $S = 107^{23} + 91^{46}$. *¿Cuál es el menor número primo que divide a **S**?*

27. Las caras diferentes de una caja son rectángulos cuyas áreas son: **24** cm^3, **32** cm^3 y **48** cm^3. ¿Cuál es el volumen de la caja?

28. *Tres personas trabajan como conductores de autobuses en tres rutas que parten del mismo punto y cuyos recorridos completos se llevan **35**, **60** y **70** minutos, respectivamente. Los tres salen a las **6** de la mañana y deciden que almorzarán juntos cuando coincidan de nuevo en el mismo punto de partida. ¿A qué hora será el almuerzo?*



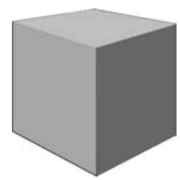
29. La organizadora de una fiesta observa que si los invitados se sientan **7** en cada mesa, quedan **4** por fuera. Y si lo hacen **9** en cada mesa, sobran **3**. Al final decide organizar **4** mesas de **8** invitados cada una, y el resto de mesas, de **7** invitados cada una. ¿Cuántos invitados hay, si no llegan a **100**?

30. *¿Hay algún número de cuatro cifras que sea divisible por **3** y por **4** y que tenga sus cuatro cifras iguales?*

31. Una caja de manzanas cuesta **2.000** pesos; una de peras, **3.000**; y una de ciruelas, **4.000**. Si **8** cajas de los tres tipos de frutas cuestan **23.000** pesos, ¿cuál es el mayor número de cajas de ciruelas que pueden comprarse?

32. *¿Cuál es la diferencia entre el menor "año primo" del siglo XXI y el mayor "año primo" del siglo XX?*

33. Tenemos **36** cubos de igual tamaño. ¿Cuántos paralelepípedos diferentes de **36** cubos pueden construirse con ellos?



34. *Dos atletas se entrenan corriendo en un circuito, a velocidades constantes pero diferentes. Ambos parten simultáneamente de la raya de salida y a los **72** minutos vuelven a coincidir en ese mismo punto. Si el más rápido de los atletas da la vuelta completa cada **8** minutos, ¿cuánto tarda el otro atleta en darla (dé todas las* *respuestas posibles, sabiendo que es un número entero de minutos, menor que una hora)?*

35. *Un campo tiene forma de cuadrilátero y las dimensiones de sus lados son **72**, **96**, **120** y **132** metros. Se desea plantar árboles sobre los cuatro linderos de tal forma que haya uno en cada vértice del campo, que todos estén igualmente espaciados, y que la distancia entre dos árboles consecutivos no sea mayor que **10** metros. ¿Cuál será esta distancia?*

36. Halle los valores numéricos de ***a***, ***b***, ***c***, ***d***, ***e*** (***a*** **≠ 0**) para que se cumpla que:
el número ***a*** sea múltiplo de **9**
el número ***ab*** sea múltiplo de **3** y de **4**
el número ***abc*** sea múltiplo de **2** y de **5**
el número ***abcd*** sea múltiplo de **7**
el número ***abcde*** sea múltiplo de **11**

*Ármese de infinita paciencia y coloque en la tabla siguiente los dígitos del **1** al **9** (uno en cada casilla)*

de manera que el número formado por los dígitos de las casillas:
1** y **2** sea divisible por **2
1**, **2** y **3** sea divisible por **3
1**, **2**, **3** y **4** sea divisible por **4
………………………..
1**, **2**, …, **8** y **9** sea divisible por **9

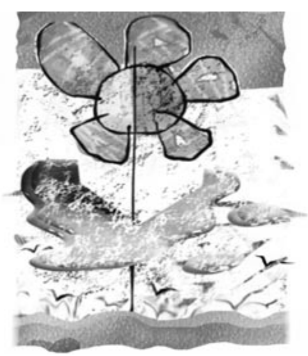
Referencias bibliográficas

- Alsina, C., De Guzmán, M. (1998). *Los matemáticos no son gente seria*. Barcelona: Rubes.
- Gentile, E. (1985). *Aritmética elemental*. Washington: OEA.
- Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Vol. I. Madrid: Alianza.
- Morin, E. (1999). *La cabeza bien puesta. Repensar la reforma. Reformar el pensamiento*. Buenos Aires: Nueva Visión.
- Sierra, M. et al. (1989). *Divisibilidad*. Madrid: Síntesis.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. 9 metros **2**. 588 libros **3.** 8 días **4.** 25 años **5.** 18 pesos **6.** Verdaderos: 1, 3, 4, 7, 11, 12, 14, 15, 17. Falsos: 2, 5, 6, 8, 9, 10, 13, 16 **7.** De ninguno **8.** Sí: a, b, d, e, f. No: c **9. a)** 4.068, 4.968; **b)** 984; **c)** 58.176, 58.374, 58.572, 58.770, 58.878; **d)** 80.568, 84.564, 88.560, 89.568; **e)** 31.332, 34.332, 37.332, 30.336, 33.336, 36.336, 39.336 **10.** 60, 72, 84, 90 y 96 (12 divisores) **11.** Los cuadrados de los números primos **12.** Verdaderos: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10. Falsos: 3, 6 **13.** Verdaderos: 3, 5, 8, 9. Falsos: 1, 2, 4, 6, 7 **14.** B = 0 **15.** 69318 **16.** 1, 4, 25, 100, 625, 2.500 **17.** 9 **18.** 40 cm **19.** 18 litros **20.** 5 maneras: 1x36, 2x18, 3x12, 4x9, 6x6 **21.** 61 años **22.** 60 cm **23.** 5 y el término intermedio **24.** 175 m^2 **25.** 6 números: 348, 384, 648, 684, 864, 468 **26.** 2 **27.** 192 cm^3 **28.** 1 p.m. **29.** 39 **30.** No **31.** 3 cajas **32.** 4 (2003 – 1999) **33.** 8 **34.** 9, 18 ó 36 minutos **35.** 6 metros **36.** 96041

Índice



Este libro se terminó de imprimir
en el mes de marzo de 2006.