Nº25

Colección Procesos Educativos

El desarrollo del pensamiento lógico-matemático

Colección Procesos Educativos Nº 25

Texto: *Martín Andonegui Zabala*

Equipo Editorial:
Beatriz García, Antonio Pérez Esclarín,
y Nieves Oliva García

Corrección:
Elda Rondini

Diseño: *Verónica Alonzo S.*
Signet V+O Comunicación Global C.A.

Edita y distribuye: *FE Y ALEGRÍA*
Movimiento de Educación Popular e Integral

Centro de Formación Padre Joaquín - Caracas
Calle 3B. Edificio C2-07, piso 1. Urbanización
Industrial La Urbina.
Telfs: (0212) 242.59.49 Fax: (0212) 242.76.04
E-mail: fyaformacion@cantv.net
Caracas. Municipio Sucre, estado Miranda.

Centro de Formación Padre Joaquín - Maracaibo
Av. Las Delicias, calle 97, Nº 15 - 139, Sector
El Tránsito, Edificio Fe y Alegría.
Telfs: (0261) 729.15.51 - 729.00.06
E-mail: fyajoaquin@cantv.net
Maracaibo, estado Zulia.

Colección Procesos Educativos
Hecho el depósito de Ley
Depósito Legal lf603199937025 (Serie)
ISBN: 980-6418-12-3 (Obra completa)

Depósito Legal lf 6032004370966
ISBN: 980-6418-60-3

CONSTRUIR *La Escuela Necesaria*

El desarrollo del pensamiento *lógico-matemático*

Martín Andonegui Zabala

Fe y Alegría

Edificio Centro Valores, Piso 7,
Esquina Luneta, Parroquia Altagracia.
Apdo. 877 Caracas 10101-A Venezuela.
Telf.: (0212) 564.98.10 - 564.74.23
Fax: (0212) 564.50.96
E-mail: feyalegría@cantv.net

"Que esta chispa, llegue a incendio"

P. Vélaz

PRESENTACIÓN

Fe y Alegría tiene un sueño: formar integralmente a los niños, niñas, jóvenes y adultos de los sectores populares tanto en valores humano-cristianos como en competencias básicas para la vida a través de los centros educativos comunitarios. Este sueño lo hemos convertido en proyecto y le colocamos el nombre de **Escuela Necesaria**. Estamos en camino de construirlo, y para ello, la reflexión sobre la acción que vamos desarrollando ha sido y seguirá siendo una tarea permanente. La formación, el acompañamiento, la investigación, innovación... se convierten en términos claves en el proceso de hacer realidad ese sueño que desde hace unos años viene alumbrando nuestras prácticas educativas.

En este contexto de construcción, y con la intención de apoyar a todos los educadores en el esfuerzo de alcanzar el objetivo propuesto, es que presentamos una serie de ocho *Procesos Educativos*, desde el Nº 19 hasta el Nº 26, relacionados con los componentes y ejes de la **Escuela Necesaria**. Recordemos que los componentes son: pastoral, pedagogía, comunidad y organización-gestión; y los ejes: lectura y escritura, pensamiento lógico matemático, trabajo-tecnología y valores humano-cristianos. En cada número de la serie se exponen planteamientos sobre el significado del componente o eje y se proponen caminos para su desarrollo en el centro educativo.

No todo está dicho, es necesario analizar con una mirada propositiva estos materiales, por cuanto los concebimos como un dispositivo para la reflexión que permita a todos continuar clarificando, a través del encuentro formativo, lo que debe ser ese sueño que denominamos Escuela Necesaria. Es importante compartir y registrar todas las preguntas, dudas, propuestas, aportes... para seguir abonando este camino de construcción que hemos emprendido. Gracias a los autores y coautores, y a todos, porque estamos haciendo de una pequeña chispa, un gran incendio; así como lo soñó el Padre Vélaz.

"No hay rama de la matemática,
por abstracta que sea,
que no pueda aplicarse algún día
a los fenómenos del mundo real"

CAPÍTULO 1
LAS ORIENTACIONES FUNDAMENTALES DEL EJE DE PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

Objetivo y principios orientadores

La propuesta fundamental del eje de pensamiento lógico matemático es la de lograr desarrollar en nuestros docentes y alumnos –constituidos en comunidad- el conocer reflexivo asociado a la construcción del conocimiento matemático. Este planteamiento, junto con la consideración de la situación actual de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática en nuestros centros, nos lleva a proponer los siguientes *principios orientadores de la acción didáctica en el aula:*

1. Enseñar matemática para generar la diversidad

No basta con aceptar la diversidad. Nuestra propuesta didáctica busca, además, generar la diversidad por la vía de la enseñanza de la matemática. ¿Qué significa esto en la práctica? Significa presentar y manejar diversos sistemas de representación de los conceptos matemáticos (por ejemplo, de las fracciones...), distintos procedimientos operativos (por ejemplo, diversas formas de efectuar las operaciones aritméticas, de calcular el máximo común divisor, de sumar fracciones, de calcular la media de un conjunto de datos, de resolver ecuaciones...), diversas vías para resolver un mismo problema, diversas formas de demostrar proposiciones matemáticas... Y también, diversas formas de construir los conocimientos matemáticos en el aula, es decir, diversidad en las estrategias de enseñanza que pueden utilizar los docentes en el aula.

2. Comprender los conceptos para establecer su relación con los procedimientos

Los conceptos deben ser dotados de significado. Significado que debe ser construido por los mismos alumnos, interactuando con el docente y entre ellos mismos. Por ejemplo, debe captarse gradualmente cuál es el sentido de las operaciones aritméticas; debe entenderse qué significa "máximo común divisor"; igualmente, qué significa sumar fracciones, o multiplicarlas; o también, qué es una ecuación y qué representa su solución. La clarificación del significado de los conceptos es una premisa indispensable para dotar de sentido a los procedimientos derivados. Y también, la única forma de romper el estereotipo de aprendizaje mecánico, rutinario y memorístico que domina en el aprendizaje habitual de la matemática.

3. Favorecer la construcción de una actitud positiva hacia la matemática

Tanto en los docentes como en los alumnos. Para lograrlo no hay que pensar, en primera instancia, en una presentación meramente agradable y lúdica de las actividades matemáticas. Este no es "el gancho". No puede serlo permanentemente. La mejor manera de fomentar una actitud positiva sólida y permanente es crear seguridad y confianza en uno mismo en cuanto a la capacidad de entender y construir el conocimiento matemático. La vía para lograr esto pasa precisamente -y aunque parezca algo contradictorio- por el logro de un aprendizaje exitoso. Y este aprendizaje -en forma progresiva, aunque sea lenta- no es algo imposible de alcanzar.

4. Plantearse una matemática "en la vida"

Y no para el futuro, o exclusivamente "para" la vida. Esto significa, en términos generales, tomar en cuenta los contextos próximos a nuestros alumnos, tanto para buscar en ellos las situaciones a modelizar matemáticamente en el aula, como para encontrar aquellas que sirvan de aplicación a los conocimientos adquiridos. Del mismo modo, significa aceptar en el aula las formas propias de los alumnos para establecer relaciones y para resolver problemas en su vida. También significa traer al aula y legitimar aquellos conocimientos, particularmente los procedimentales, que son utilizados habitualmente por la gente aun cuando desconozcan su fundamento matemático o no sepan cómo explicarlo. Y, finalmente, tomar en cuenta el lenguaje de nuestros alumnos, para lo cual es muy importante fomentar el diálogo entre los propios alumnos, hacer que trabajen en pequeños grupos, o dejar que expresen sus ideas matemáticas con sus propias palabras.

Las competencias a desarrollar

En este contexto orientador de la acción didáctica en el aula, se plantea como meta el desarrollo de las siguientes *competencias* en cada alumno y docente:

- Desarrolla procesos lógicos
- Elabora y aplica modelos
- Resuelve problemas matemáticos
- Comunica ideas matemáticas
- Posee sentido numérico
- Posee sentido geométrico y de la medida
- Sabe procesar e interpretar información
- Sabe utilizar expresiones algebraicas y funcionales (desde la Tercera Etapa de EB)

Algunas observaciones acerca del desarrollo de las competencias

Como puede observarse, las cuatro primeras competencias -Desarrolla procesos lógicos, Elabora y aplica modelos, Resuelve problemas matemáticos, Comunica ideas matemáticas- son de carácter general y aplicables a la construcción de cualquier contenido matemático en el aula.

En cambio, las cuatro últimas -Posee sentido numérico, Posee sentido geométrico y de la medida, Sabe procesar e interpretar información, Sabe utilizar expresiones algebraicas y funcionales- están orientadas hacia contenidos de áreas explícitas: Aritmética, Geometría y Medida, Estadística y Probabilidad, Álgebra y Análisis, respectivamente.

En consecuencia, el desarrollo de las cuatro primeras competencias debe intentarse habitualmente durante el trabajo de construcción de los conocimientos matemáticos en las áreas referidas. No puede hablarse de desarrollar, por ejemplo, la comunicación de ideas matemáticas, si no precisamos el campo -Aritmética, Álgebra,...- donde se ubican tales ideas, lo que nos remitirá a las formas precisas de comunicación –lenguaje, símbolos, reglas de interpretación, etc.- propias de tal campo.

Pero, por otro lado, todo lo anterior significa a su vez que el desarrollo de cualquiera de las cuatro últimas competencias adquiere su sentido más pleno sólo cuando está sustentado simultáneamente con el desarrollo de las cuatro competencias iniciales. Así, por ejemplo, no puede plantearse la adquisición del sentido geométrico sino por la vía del desarrollo de procesos lógicos en esa área, de la elaboración y aplicación de modelos geométricos, de la resolución de problemas geométricos, y de la competencia para comunicar ideas matemáticas por medio del lenguaje geométrico.

Por esta razón, al realizar alguna actividad matemática con los alumnos, realmente no puede pensarse en que vamos a estar desarrollando una sola competencia. Probablemente –aunque quizá no lo percibamos de manera explícita-, la actividad hará referencia, simultáneamente, a más de una y a varios indicadores. Así, por ejemplo, si los alumnos están resolviendo un problema que implica el uso de fracciones, las competencias en juego serían:

- la 5ª -Posee sentido numérico-, por cuanto deben seleccionar la representación numérica más adecuada para las fracciones, así como la operación más pertinente, y realizarla correctamente.
- la 3ª -Resuelve problemas matemáticos-, con todos los indicadores pertinentes.
- la 1ª -Desarrolla procesos lógicos-, por cuanto los alumnos deben aplicarse con la observación, el establecimiento de semejanzas y diferencias, el análisis de diversas alternativas, la toma de decisiones…
- la 2ª -Elabora y aplica modelos-, ya que la resolución de problemas conlleva de suyo la búsqueda y aplicación de modelos pertinentes (aritméticos, en este caso).
- la 4ª -Comunica ideas matemáticas-, en la medida en que deben aportar ideas para la resolución del problema, explicar cómo lo plantearon y resolvieron, darle forma escrita a su resolución…

De más está decir que la evaluación del desempeño de los alumnos en cada actividad debe centrarse en el grado de presencia de los indicadores correspondientes a las competencias en juego. Así, en el ejemplo anterior, la evaluación debería referirse a las competencias e indicadores citados.

Por otro lado, los contenidos matemáticos a los que hacen referencia las cuatro últimas competencias tampoco pueden pensarse en forma de compartimentos estancos, sin comunicación entre ellos. Puede existir algún modo de interrelación. Así, un problema matemático cuyo proceso de resolución implique la búsqueda y aplicación de un modelo aritmético, puede estar referido a objetos geométricos y puede permitir el uso de herramientas estadísticas para la presentación de ciertos datos conexos como, por ejemplo, los resultados de la evaluación de los alumnos en esa actividad.

Esto significa, entre otras cosas, que el tratamiento de cada tópico matemático en el aula -tratamiento llevado a cabo de tal forma que genere el desarrollo de todas las competencias implicadas- no puede pensarse sólo como algo puntual, ubicado en un único momento del devenir escolar, y que luego se abandona y se deja a merced de la memoria del alumno, sino que debe ser algo a lo que se regrese -para integrarlo con lo que sigue- a medida que se avanza en nuevos tópicos.

2 CAPÍTULO
EL DESARROLLO DE LAS COMPETENCIAS

La Sustracción

De todo lo dicho anteriormente vamos a quedarnos con una conclusión: en lo que sigue, para mostrar el desarrollo de las competencias, no vamos a tomarlas de una en una y hacer ver cómo ese desarrollo es posible. Más bien vamos a partir de dos contenidos matemáticos de los programas escolares -el tema de la sustracción y el de las medidas estadísticas de tendencia central- para hacer una presentación matemática de los mismos que, a su vez, permita un tratamiento didáctico capaz de generar el logro de competencias propias del Eje. Porque ocurre que no toda forma de presentar y tratar un tema genera siempre y sin más, el desarrollo de las competencias que nos interesan. Y vamos a insistir en el tratamiento matemático de cada contenido, porque ahí está la fuente del éxito de este desarrollo.

Posteriormente, una vez culminada la propuesta matemática y didáctica correspondiente a cada ejemplo, haremos un análisis de las competencias susceptibles de ser desarrolladas por la vía expuesta.

Actividad 1:
Construir y aplicar el concepto y los procedimientos de la sustracción
La operación de sustracción como modelo de ciertas situaciones

El contenido conceptual de la operación de sustracción -como el de las demás operaciones aritméticas- puede abordarse desde la perspectiva del modelaje. Es decir, plantearse *de qué situaciones de la vida corriente es modelo la operación de restar*.

Esta forma de abordar el tema es muy importante por cuanto, a la hora de resolver un problema de la vida diaria o de cualquier otra disciplina, seleccionar la operación que es pertinente para la ocasión es más importante –y aparentemente más difícil, pues todos tenemos la experiencia de los niños preguntando: ¿este problema es de sumar, restar…?- que saber realizar correctamente la operación en cuestión. Esta última actividad corresponde al nivel del *saber matemático*, mientras que la oportuna selección de la operación se ubica en el nivel del *saber tecnológico*.

Volviendo, entonces, a la cuestión inicial, podemos observar que la resta es modelo de las situaciones de:

- *Quitar*: ¿Cuánto queda después de quitar, perder, regalar, pagar, gastar…tal cantidad?
- *Faltar para*: ¿Cuánto falta para tener, llegar a, alcanzar, conseguir… tal cantidad?
- *Comparar dos cantidades*: ¿En cuántas unidades es mayor o menor esta cantidad respecto a esta otra? (No ¿cuántas veces es mayor?, pregunta que corresponde a la operación de división).

Esto significa, en primer lugar, que hay que ir presentando a los niños –progresivamente pero sin falta- situaciones de los tres tipos planteados. Por ejemplo, los niños tendrán que ser capaces de resolver pequeños problemas al estilo de los siguientes:

- Pedro tenía 9 metras y le prestó 5 a José. ¿Cuántas metras tiene ahora Pedro?
- Olinto tiene 13 carritos. Al perder 4, le quedan tantos como a Rafael. ¿Cuántos carritos tiene Rafael?
- Silvia tiene 16 creyones y Nancy tiene 7. ¿Cuántos creyones necesita Nancy para tener tantos como Silvia?
- Ana tarda 20 minutos en llegar a la escuela y Mayra tarda 9 minutos menos que Ana. ¿Cuántos minutos tarda Mayra en llegar a la escuela?
- Hoy es 9 de Mayo y mi cumpleaños es el 31 de Mayo. ¿Cuántos días faltan para mi cumpleaños?
- Juan nació cuando su hermano Andrés tenía 10 años. Andrés tiene ahora 21 años. ¿Cuántos años tiene Juan?
- Al finalizar el curso, Aurelio ha ocupado 57 páginas de su cuaderno, mientras que Mariela ha completado el suyo de 80 páginas. ¿Cuántas páginas más ha llenado Mariela?

Cabe observar que los docentes tendrán que estar atentos para captar cuándo los niños comprenden los enunciados y entienden verdaderamente cada situación propuesta, ya que no todos los enunciados tienen la misma carga semántica. Esto puede implicar que, incluso, algunos de estos pequeños problemas tendrán que ser propuestos –y con cantidades mayores en el minuendo y sustraendo- en grados posteriores al grado en que los niños empiezan a trabajar con la resta, sin que esto signifique nada anómalo.

Pero lo importante es captar que hay que variar el formato de las pequeñas situaciones-problema para que se pueda hablar de un verdadero saber –matemático y tecnológico- referido al concepto de la resta. Tenemos que insistir en que esta propuesta didáctica no viene del aire, sino que se deriva directamente de entender el concepto matemático de la operación de restar como modelo de diversas situaciones de la vida diaria. Obsérvese cómo el concepto matemático incide en la propuesta instruccional que se debe llevar al aula…

Empezar con la relación "menos que"

Bien. Si lo anterior representa el adónde se debe llegar en las actividades de restar, podemos fijarnos ahora en cómo empezar el tema en el aula. Una forma de hacerlo puede ser planteando a los niños situaciones concretas en las que puedan apreciar la relación *menos que* al comparar dos cantidades. Por ejemplo:

- Si tienes 8 metras y se te pierden 2, ¿te quedan más o menos metras?
- Si tienes 7 monedas de cien bolívares y gastas 3, ¿te quedan más o menos monedas?
- Si tienes 3 lazos y necesitas tener 10, ¿tienes menos lazos que los que necesitas?; ¿te faltan menos de 10 lazos?
- Si Berta tiene 9 años y Rosaura 7, ¿quién de las dos tiene menos años?

Los procedimientos para efectuar la resta

Posteriormente habrá que plantear situaciones que lleven al modelo matemático de la resta y acercarse a los *procedimientos* para resolverlas, es decir, para efectuar las restas. He aquí algunos.

P1 – Con objetos concretos

Los primeros pasos –como en todas las operaciones aritméticas- hay que darlos con *objetos concretos:* chapas, fichas, granos, piedras, dedos…

En las situaciones de *quitar*, podemos proceder colocando sobre la mesa tantas unidades como indica el minuendo, y retirando después tantas como expresa el sustraendo. El conteo de lo que queda es la diferencia.

En las situaciones de *faltar para* y de *comparar dos cantidades*, pueden colocarse ambos grupos de unidades -del minuendo y del sustraendo- sobre la mesa, establecer una correspondencia uno a uno entre ambos grupos hasta donde alcance, ir retirando progresivamente esos pares correspondientes, y contar las unidades restantes del grupo del minuendo. Un signo de mayor madurez en el niño puede venir dado por el conteo desde el número menor hasta el mayor, o desde el mayor hasta el menor. El uso de los dedos por parte de los niños parece muy conveniente.

Estos ejercicios son, ante todo, de *resolución oral*; la expresión escrita puede aparecer más tarde. Del mismo modo, la terminología –minuendo, sustraendo, diferencia, resta, sustracción, igual a- debe introducirse poco a poco, a medida que el niño vaya entendiendo lo que hace y se vea en la necesidad de llamar a cada cosa con algún nombre.

P2 – Con billetes

En el camino hacia las expresiones escritas habituales de la resta (horizontal: minuendo – sustraendo = diferencia; vertical: minuendo, sustraendo, raya, diferencia) puede utilizarse previamente como recurso concreto un juego de *billetes* con todas las denominaciones del sistema decimal: 1, 10, 100, 1.000, etc. El uso de este recurso tiene la ventaja -para todas las operaciones aritméticas- de permitir a los niños una mejor comprensión del valor de posición y de los algoritmos escritos.

Por ejemplo, si los niños enfrentan una situación en la que hay que restar “853 menos 541”, podemos designar a tres niños del salón con las letras A, B y C, a quienes haremos entrega de las centenas, decenas y unidades, respectivamente, representadas en el número 853. Los propios alumnos irán indicando cuántos billetes de 100 le daremos a A (8), cuántos de 10 a B (5), y cuántos de 1 a C (3).

Ahora la cuestión está en retirar de ahí la cantidad de 541. Con los propios alumnos se puede llegar a concluir que A debe reintegrar 5 billetes de 100; B, 4 de 10; y C, 1 de 1. El conteo de lo que queda: A con 3 billetes de 100, B con 1 de 10, y C con 2 de 1, nos permite reconstruir el número final atendiendo a sus valores de posición, para llegar al resultado de 312 como la diferencia buscada, "lo que queda". Obsérvese que hemos restado de izquierda a derecha.

En el caso de las "restas con dificultad" (nótese que su designación con este nombre ya supone la previsión de un posible fracaso y una invitación para el desaliento del docente...) puede procederse de una manera similar, con la ayuda de un "banco de billetes" en el salón. Por ejemplo, si se trata de restar "1.306 menos 866", procedemos como antes -ahora con cuatro alumnos, A, B, C, y D-. Los alumnos indicarán que A recibirá 1 billete de 1.000; B, 3 de 100; C no recibirá ningún billete de 10; D, 6 de 1.

Posteriormente y empezando por la derecha, D devolverá 6 billetes de 1, porque dispone de suficientes para hacerlo. C debería devolver 6 billetes de 10, pero no posee ninguno. ¿Qué hacer en este caso? Ir al banco, que tiene muchos billetes de 10, pero que no regala nada, sólo cambia. Si alguien le da un billete de 100, el banco puede devolverle 10 billetes de 10. Esto es lo que hace B, quien se quedará con 2 billetes de 100. Y C dispondrá de 10 billetes de 10 ("prestados" por B, a través del banco), y así podrá devolver los 6 que le tocan.

Pero ahora el problema lo tiene B, quien dispone de 2 billetes de 100 y debe devolver 8... Vuelta al banco. Esta vez, A entregará su único billete de 1.000 y el banco le dará 10 billetes de 100 a B, quien podrá disponer de 12 (10 "prestados" por A, a través del banco, + 2 que le quedaban). Y así podrá devolver los 8 que le corresponden.

El resultado final está "a la vista": A, 0 billetes de 1.000; B, 4 (12 – 8) billetes de 100; C, 4 (10 – 6) billetes de 10; y D, 0 billetes de 1 (6 – 6). En definitiva y agrupando estas cifras según su posición, nos queda como diferencia el número 440. ¿Dónde está la "dificultad" de la resta...?

P3 – Restar como quien da el vuelto

También con los billetes pueden resolverse estas restas por la vía de quien *da el vuelto* (al estilo de los buhoneros...). Por ejemplo, la resta “1.306 menos 866” puede entenderse como “lo que falta de 866 para llegar a 1.036” o, en términos comerciales, “cuánto tengo que devolver si la mercancía cuesta 866 y me están pagando con 1.306”.

El procedimiento de dar el vuelto puede ir más o menos así:

De 866	a 870	van 4 billetes de 1
De 870	a 900	van 3 billetes de 10
De 900	a 1.000	va 1 billete de 100
De 1.000	a 1.300	van 3 billetes de 100
De 1.300	a 1.306	van 6 billetes de 1

En total tenemos que la diferencia, “lo que faltaba”, está resumida en 4 billetes de 100, 3 billetes de 10, y 10 billetes de 1. Como no puedo tener más de 9 billetes de cualquier denominación, llevo al banco mis 10 billetes de 1, que me serán devueltos como 1 billete de 10. En definitiva, hay 4 billetes de 100, 4 de 10, y 0 de 1, lo que corresponde al número 440.

Como puede comprobarse a la luz de estos ejemplos, el uso de los billetes no sólo refuerza la comprensión del valor de posición de los números, sino que sirve de soporte para entender el significado de la propia operación de restar.

P4 – Mediante desplazamientos en la tabla de los cien primeros números

También es posible llevar el algoritmo de la sustracción al terreno gráfico, alternativa de interés para aquellos docentes y alumnos más inclinados hacia la comprensión por esta vía. Así, por ejemplo, podemos utilizar la *tabla de los cien primeros números*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

para efectuar restas cuyo minuendo no sobrepase de 100 -es decir, restas planteadas al comienzo del proceso instruccional referido al tema de la sustracción-.

Para ello, en primer lugar hay que detectar las regularidades, los patrones que se hallan presentes en esta distribución de números. Por ejemplo, si se observa cada fila, el paso de un número a su siguiente a la derecha significa la adición de una unidad. Y si se pasa a la izquierda, la sustracción de una unidad. Análogamente para cada columna, el paso a cada número inferior -"bajar un piso"- representa la adición de una decena, mientras que el paso a cada número superior -"subir un piso"- significa la sustracción de una decena.

De esta forma y para el caso de la resta, quitar 3 decenas a un número cualquiera equivaldrá visualmente a subir tres pisos, y quitar 5 unidades, a correrse cinco lugares hacia la izquierda. Ahora podemos plantear, por ejemplo, el ejercicio 96-35. Para efectuarlo, nos ubicamos en el número 96; subimos 3 pisos (restamos 3 decenas) y llegamos al número 66; retrocedemos 5 lugares hacia la izquierda (restamos 5 unidades) y llegamos al número 61, nuestra respuesta. Evidentemente, la sustracción puede hacerse en orden inverso, restando primero las unidades (retrocediendo hacia la izquierda) y luego las decenas (subiendo los pisos). Es decir, podemos restar de izquierda a derecha, o de derecha a izquierda, cuestión que pierde relevancia cuando se maneja correctamente el significado del valor de posición de las cifras de un número.

Y si se trata de una resta "con dificultad", tampoco hay problema. Así, para restar por ejemplo, 72 - 59, podemos subir 5 pisos y llegar a 22, para retroceder ahora 9 lugares, conteo que nos llevará a la respuesta, 19, ubicada en la fila superior.

P5 – Mediante saltos sobre la recta numérica

Otra forma gráfica de efectuar la resta – ligada a la de dar el vuelto con billetes, vista antes- es la de visualizar estos pasos sucesivos mediante *"saltos" sobre una recta numérica*. Así, por ejemplo, para efectuar la operación 1.032 – 358, procedemos a ubicar los dos números en una recta numérica -no importa la precisión de esta ubicación- y a tratar de llegar de uno al otro -tampoco importa el orden en que se haga, del menor al mayor o viceversa- mediante saltos apropiados y sencillos:

	2		40		600		30		2	
358		360		400		1.000		1.030		1.032

Obtener la diferencia entre 1.032 y 358 se reduce ahora a “sumar” los valores de todos los “saltos” o intervalos parciales en el orden que uno quiera y que resulte más fácil. Así, 1.032 – 358 = 600 + (40 + 30) + (2 + 2) = 674.

Cabe observar que esta distribución de los saltos puede hacerse de varias maneras, al gusto y facilidad de cada alumno. Así, por ejemplo, pudo haberse hecho de esta forma:

	600	2	40	30	2
358	958	960	1.000	1.030	1.032

Al igual que en el caso de la visualización planteada con la tabla de los cien primeros números, aquí se deja también cierto margen de libertad y de toma de decisiones para que el niño seleccione la vía de resolución del ejercicio.

P6 – Por la vía del cálculo mental

Pero hay algo más que decir acerca de estas formas gráficas de efectuar la sustracción. Y es que no resulta difícil arribar, a partir de ellas, a ciertas estrategias de *cálculo mental* que facilitan esta operación. Por ejemplo y en el caso de los desplazamientos en la tabla de los cien primeros números, los niños pueden llegar a detectar e inferir que restar 9 unidades a un número, generalmente coloca la respuesta en la fila superior del número dado y desplazada un lugar a la derecha (41 – 9 = 32), con lo que se descubre que restar 9 equivale a restar 10 y sumar 1 (41 – 9 = 41 - 10 + 1 = 31 + 1 = 32). Y que restar 8 equivale a restar 10 y sumar 2, etc. En definitiva, podemos entrar en el ejercicio del cálculo mental de las restas desde el primer grado…

Otro descubrimiento para el cálculo mental proviene del tipo de restas tales como 83 – 54. Realizada sobre la tabla de los cien primeros números, nos llevaría visualmente hasta el número 29. No es difícil percatarse que si se restan dos números cuyas cifras de las unidades coincidan (83 – 53), la diferencia se ubica siempre en la columna de la derecha de la tabla (30: sólo hay que restar las decenas). A partir de estas observaciones los niños pueden inferir que restar 83 – 54 equivale a efectuar la operación en dos pasos: 83 – 54 = 83 – 53 -1 = 30 -1 = 29. Y análogamente, por ejemplo, 93 – 26 = 93 – 23 – 3 = 70 – 3 = 67.

De manera similar, el trabajo visual con los saltos sobre la recta numérica puede estimular el cálculo mental de la sustracción. Realmente y con suficiente práctica, es de esperarse que se alcance el paso de lo visual a lo mental.

Todos estos planteamientos nos deben llevar hacia una conclusión importante: **No toda la ejercitación en la sustracción -ni en las demás operaciones aritméticas- tiene que hacerse por la vía escrita**. **Hay que dejar un campo amplio, bien amplio, a la ejercitación visual y, sobre todo, a la mental**. Volveremos sobre este punto.

P7 – En forma escrita vertical, "quitando prestado"

Llegamos –por fin…- al terreno de las sustracciones que se presentan, o se proponen para resolver, *en forma escrita vertical*, por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 9.385 \\ -\underline{5.105} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4.015 \\ -\underline{3.926} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 600 \\ -\underline{599} \end{array}$$

La primera y urgente recomendación a formular es que, ante todo, **hay que observar el ejercicio propuesto, hay que "leer" los números que se restan**. Así, la primera de las restas presenta todas las cifras del minuendo mayores que las del sustraendo, en su respectivo lugar de posición; conclusión inmediata: la resta de las respectivas cifras puede hacerse en el orden que se desee, de izquierda a derecha, de derecha a izquierda, en forma salteada... Esa situación no se presenta en los otros dos ejercicios, por lo que habrá que proceder de otro modo para obtener la diferencia. Pero en el tercero, en particular, la mera observación de las cantidades nos hace ver que son números seguidos y que, por tanto, su diferencia es 1, cifra que colocaremos sin más en el lugar de las unidades… y listo. De modo que **la habitual consigna de "ordena y resta" debe cambiarse por la de "observa y resta".**

A partir de la anotación anterior podemos llegar también a otra conclusión, tan importante y urgente como la anterior: **Proponer un ejercicio de sustracción en forma escrita vertical no significa que ése sea el lugar en el que necesariamente debe realizarse la resta. Ese es simplemente el lugar en el que hay que colocar la respuesta, la diferencia. Pero la operación puede hacerse en la forma y en el lugar en el que más fácil le resulte al alumno**. Así, el segundo de los ejercicios propuestos -resta "con dificultad"- resulta muy sencillo si se procede por la vía visual de los "saltos" o por la vía numérica equivalente de "dar el vuelto", cálculos que, incluso y con cierta facilidad, pueden realizarse mentalmente. Obtenida así la respuesta, se coloca en el lugar correspondiente.

¿Y qué decir, entonces, de las situaciones de las restas "con dificultad" y de su infaltable "*quitar prestado*"? ¿Se pueden enseñar de la forma en que habitualmente lo hacemos? Sí, claro que sí, pero con dos acotaciones. En primer lugar, si se garantiza que los alumnos lleguen a entender el porqué de este procedimiento y del papel que juega en él la consideración del valor de posición –y para ello es muy pertinente venir de la práctica con los billetes, tal como se expuso anteriormente-. Y en segundo lugar, si se recuerda que existen otros posibles modos de resolución "por fuera" -visuales y mentales- y que la disposición vertical es sólo para colocar en su lugar la diferencia solicitada.

P8 – En forma escrita vertical, "llevando"

De todos modos, existe otra variante para restar sobre el dispositivo escrito vertical de la operación, de uso pertinente en los casos de restas con dificultad. Esta variante se basa en lo que ocurre cuando se "quita prestada" una unidad a la cifra que ocupa la posición a la izquierda de la cifra "en problemas". Veamos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r} 4.837 \\ -\underline{1.254} \end{array}$$

En el lugar de las decenas, el 3 del minuendo debe "quitar prestada" una unidad (una centena) al 8 de las centenas del propio minuendo, y con esto resuelve su problema con el 5 del sustraendo. Pero a nivel de las centenas, la situación no es ya "8 – 2", sino "7 – 2", cuyo resultado es 5. Ahora bien, este mismo resultado se obtiene si la resta "8 – 2" se hubiera convertido en "8 – 3", es decir, si en lugar de quitar 1 a la cifra del minuendo, hubiéramos dejado igual esta cifra y hubiéramos aumentado en 1 la cifra del sustraendo. Cuando se procede así, la diferencia no cambia.

En otros términos más "familiares", cada vez que tengo una "dificultad", en lugar de "quitar prestada" una unidad a la cifra de la izquierda del minuendo, "llevo" una unidad a la cifra de la izquierda del sustraendo. Así, en el ejemplo anterior, la "cantaleta" iría en estos términos empezando por la derecha: "Del 4 al 7 van 3 (y escribo 3 en el lugar de las unidades). Del 5 al 13 van 8 (y escribo 8 en el lugar de las decenas), y llevo 1. Del 3 (2 + 1 de la "llevada") al 8 van 5 (y escribo 5 en el lugar de las centenas). Del 1 al 4 van 3 (y escribo 3 en el lugar de las unidades de mil)". Obsérvese que se indica "del 5 al 13" en el caso de las decenas, y no "del 5 al 3", por cuanto esta última resta no es posible y porque, además, el "quitar prestado" de las centenas nos permite tener realmente 13 decenas. Como se ve, este procedimiento de la "llevada" al sustraendo es, simplemente, una variante operativa del "quitar prestado".

¿Por qué toda esa variedad?

A estas alturas de la exposición conviene hacer un alto para reflexionar y percibir cómo lo que venimos proponiendo responde a los principios orientadores de la acción didáctica en el aula, particularmente a los referentes a "enseñar matemática para generar la diversidad" y a "comprender los conceptos para establecer su relación con los procedimientos".

No debe sorprendernos, pues, la variedad de procedimientos propuestos: manejo de objetos concretos y, en particular, de un sistema de billetes; utilización de recursos visuales, tales como los desplazamientos en la tabla de los cien primeros números y los saltos sobre la recta numérica; utilización del cálculo mental; uso de la estrategia del quitar prestado o de su variante de la llevada, aplicables directamente en los ejercicios escritos presentados en forma vertical. Toda esta variedad y, sobre todo, la forma en que debe presentarse a los alumnos, responde expresamente a los principios mencionados.

En efecto, por un lado, deben enseñarse todos los procedimientos -eso sí, gradualmente- no sólo para ajustarse a las diferencias individuales, sino para generar diversidad y para que el alumno disponga de un campo de selección de alternativas en el que pueda desarrollar su capacidad de elegir y de tomar decisiones. Por otro lado, no deben enseñarse los procedimientos como recetas aisladas, sino que debe mostrarse cómo se derivan del concepto de sustracción, cómo se justifican, por qué funcionan adecuadamente, y cómo se relacionan unos con otros. Este recurso al concepto es fundamental y un complemento necesario al mero ejercicio de la memoria referida al procedimiento: si éste se me olvida, puedo reconstruirlo de alguna manera a partir del concepto.

Hacer la "prueba" en cada resta

Un par de observaciones adicionales. La primera se refiere a la validación de cada resta efectuada, a la "*prueba*" de cada ejercicio de sustracción realizado. El alumno debe verificar si su ejercicio está bien resuelto. La prueba más directa consiste en sumar las cantidades del sustraendo y de la diferencia y ver si se obtiene como resultado la cantidad del minuendo. También puede utilizarse la calculadora para esta verificación, si se dispone de la misma. Pero cuando el mismo alumno ha tenido la oportunidad de manejar diversos procedimientos para efectuar la sustracción, cuenta con el recurso adicional de poder revisar su resultado realizando de nuevo la operación por alguna de las vías alternativas a la utilizada en su ejercicio. Esta es otra de las ventajas de la generación de diversidad…

La realización de la "prueba" de la resta resulta obligada, pero no sólo para verificar lo correcto del resultado obtenido. También, porque permite observar cómo la suma y la resta son operaciones opuestas, relación cuya percepción resulta fundamental para ir construyendo -con el tiempo y la maduración del estudiante, no inmediatamente- un conocimiento y una percepción de la matemática como un edificio conceptual integrado, en el que no existen elementos aislados.

Pero hay algo más. Hacer entender al alumno la necesidad de verificar el resultado de su operación persigue el propósito de tratar de inducir en él la *responsabilidad por su trabajo y por los resultados* obtenidos en el mismo. Evidentemente, la maestra debe evaluar los ejercicios realizados por el alumno, pero esto no debe dar a entender que sólo a ella le compete la responsabilidad por los resultados del trabajo de los alumnos -"ella es la que en definitiva decide lo que está bien y lo que está mal"-, sino que son éstos quienes deben asumirla primordialmente. De aquí que, en su evaluación, la maestra no debe contentarse con indicar "ejercicio bueno" o "ejercicio malo", sino que debe llamar a cada alumno para revisar con él el trabajo realizado y el resultado obtenido.

Los errores sistemáticos: cómo entenderlos y enfrentarlos

La segunda observación en cierto modo complementa la anterior y se refiere al caso en que los alumnos presenten errores sistemáticos al efectuar sus restas -situación que suele acaecer con frecuencia incluso en grados posteriores a los dos primeros-. Casos emblemáticos, en las restas escritas y presentadas en forma vertical, son el de no saber "ordenar" en correspondencia las cifras del minuendo y del sustraendo, o el de equivocarse a la hora de "quitar prestado". Con frecuencia intentamos corregir estos errores volviendo a "recitar" los pasos del procedimiento que debe seguirse ahí, en el ejercicio escrito vertical.

En realidad, estamos cometiendo un error de apreciación que invalida nuestro esfuerzo, ya que de hecho los alumnos siguen cometiendo después las mismas equivocaciones. Nuestro error como docentes consiste en pensar que los alumnos poseen *deficiencias* en lo procedimental, cuando de hecho las poseen *en lo conceptual*: se equivocan porque no han entendido qué significa restar y qué papel juega en esta operación el sistema posicional. Por consiguiente, no es inicialmente en lo procedimental donde hay que buscar los correctivos, sino en el campo de lo conceptual.

¿Qué hacer?. Con anterioridad se ha planteado una secuencia de presentación del tema de la sustracción -el recurso a lo concreto, el recurso a lo visual, la ejecución mental, la ejecución escrita vertical- que va fundamentando la construcción tanto de lo conceptual como de lo procedimental. A resaltar, en particular, cómo los dos primeros recursos -lo concreto y lo visual- sirven de fundamento a los dos últimos -lo mental y lo escrito-.

Esto significa, entre otras cosas, que si se presenta un problema en la ejecución escrita -que es un campo abstracto…- hay que regresarse a lo concreto para restaurar las deficiencias conceptuales y volver a fundamentar lo procedimental abstracto. Así, por ejemplo para los dos casos indicados -equivocaciones al ordenar cantidades y al quitar prestado- resulta muy oportuno retornar a los ejercicios con los billetes con el fin de recobrar el sentido de lo posicional y, a partir de ahí, establecer de nuevo la trasposición hacia el procedimiento de restar en un dispositivo escrito vertical, sin perder de vista lo que significa este procedimiento abstracto con referencia al concreto. Y repetir este retorno todas las veces que haga falta.

Aprender a estimar la diferencia

Hasta ahora se ha hablado exclusivamente de la resolución exacta de los ejercicios de sustracción. Sin embargo, hay situaciones en la vida diaria y en la misma matemática, en las que es suficiente tener una idea, un valor aproximado de la diferencia de dos cantidades. Esto es lo que llamamos la *estimación del resultado*, competencia que progresivamente deben ir adquiriendo los niños.

Algunas de esas situaciones pueden presentarse, por ejemplo, cuando se trata de saber si después de pagar determinada mercancía con un billete de valor x, el vuelto que nos den será mayor o menor que otra cantidad y. En estos casos no hace falta conocer la respuesta exacta del vuelto. Obsérvese que para estimar una diferencia (por ejemplo, 10.000 – 4.249) empezamos a fijarnos en las cifras de la izquierda. Así, para el caso propuesto, estamos quitando de 10.000 algo más que 4.000, con lo que ya podemos deducir que la diferencia será menor que 6.000, aunque mayor que 5.000.

En general, este tipo de razonamiento debería estar presente -como ya se dijo anteriormente al hablar de la necesidad de “leer” inicialmente las cantidades a restar- como punto de partida en toda operación de sustracción. Con ello no llegamos, evidentemente, a la precisión que suministra la realización exacta de la operación, pero sí tenemos una idea previa y razonable de la respuesta que se va a obtener.

Resolución de “problemas de sustracción”

Realmente, antes de hablar de verdaderos problemas de sustracción debemos referirnos a *situaciones de sustracción*, es decir, situaciones verosímiles cuyo modelo de resolución es esta operación aritmética. De este estilo son las propuestas inicialmente y otras similares, como por ejemplo:

- Olinto tiene 13 carritos. Al perder 4, le quedan tantos como a Rafael. ¿Cuántos carritos tiene Rafael?
- Silvia tiene 16 creyones y Nancy tiene 7. ¿Cuántos creyones necesita Nancy para tener tantos como Silvia?
- Juan nació cuando su hermano Andrés tenía 10 años. Andrés tiene ahora 21 años. ¿Cuántos años tiene Juan?
- En una parada se suben al autobús 17 personas. Cuando el vehículo arranca, el conductor observa que ahora van 5 personas más que antes de detenerse. ¿Cuántas personas se bajaron del autobús en esa parada?

El planteamiento de estas situaciones en el aula adquiere validez por cuanto son útiles para dilucidar el tipo de operación que es pertinente para su resolución, descartando razonadamente aquellas operaciones que no lo son. Recuérdese que esta determinación forma parte del saber tecnológico, más allá del meramente matemático. De esta manera, percibimos que tales situaciones nos sirven inicialmente como casos modélicos, y posteriormente, como casos de aplicación. Así, nuestro ciclo comienza en la vida diaria y termina de nuevo en ella.

En cuanto a las formas de trabajar estas situaciones en el aula, se debe privilegiar su *resolución oral* y, a ser posible, *en grupos*. No hay que tener prisa ni insistir en la formulación escrita, casi siempre ceñida al esquema "Datos / Solución / Respuesta", que convierte en mecánico el proceso de resolución. La explicación oral permite conocer los modos de razonamiento de los niños, sus expresiones, y sus maneras de comunicar las ideas y de utilizar los términos matemáticos; de ahí que resulte insustituible al comienzo.

Otro modo de trabajo con los niños puede ser el de la *dramatización* de la situación. Por ejemplo, este procedimiento resulta muy aconsejable en el ejercicio del autobús, recién propuesto, ya que su enunciado puede no resultar tan claro como otros y porque, además, en ningún momento se dice cuántos pasajeros venían antes de la parada, ni cuántos siguen después, lo que permite establecer diversas conjeturas muy interesantes.

Todas estas observaciones son válidas también para el caso de los problemas, es decir, de las situaciones que realmente surjan en la vida diaria de los niños del salón, así como en las derivadas de los PPA que se desarrollen en el aula, y cuya resolución sea de algún modo necesaria para los niños. Resulta aconsejable resaltar los tipos de problemas que denominamos "combinados", de sumas y restas, pero no de construcción artificial, sino verdaderamente generados en el contexto de los niños.

¿Y todo esto de una sola vez?

No, no va de una sola vez, ni de dos veces. En realidad, hay que mantenerlo de forma continua, y evaluarlo también de forma continua. La idea normativa es que los temas de matemática no se construyen por un tiempo para después abandonarlos hasta el curso que viene… o hasta nunca más.

Si los niños van a construir los conocimientos correspondientes a la sustracción de la forma sugerida hasta ahora, el propio proceso indicará a la maestra el nivel de madurez que los niños vayan adquiriendo, así como las dificultades que se les vayan presentando, algunas superables en el momento, pero otras no. Cuando esto último ocurre -por ejemplo, la imposibilidad de entender algunos enunciados de situaciones, en razón de la carga semántica de su planteamiento-, es una señal para dejar de momento esa tarea específica, pero también un aviso para recordar que hay que volver posteriormente al mismo punto.

Por otro lado, si los niños aprenden a restar, esta actividad debe mantenerse de seguido en el aula, aprovechando para su ejercitación las oportunidades que puedan brindar no sólo otros temas de matemática, sino también los de otras disciplinas: lenguaje, ciencias de la naturaleza, ciencias sociales, recreación, etc.

Esta actividad permanente no está dirigida exclusivamente a mantener el recuerdo de los procedimientos, sino también el de los conceptos implicados en la operación de sustracción, y el de la relación entre ambos. De esta forma puede procederse, por ejemplo y sin mayores traumas, al paso de las restas entre números enteros a las restas con números decimales. Basta con indicar aquí que, para estas últimas, también pueden utilizarse "billetes" de una décima (0,1), de una centésima (0,01), etc., con lo que se pone de manifiesto que es posible extender al caso de los decimales la estructura operacional que se generó con la resta de números enteros.

El desarrollo de competencias en los alumnos

Probablemente el relato de la propuesta matemática y didáctica referente al tema de la sustracción nos ha podido parecer un poco largo. Sin duda lo es, así como necesario. Porque sólo una enseñanza planteada de esa forma –o de otra muy similar- puede garantizar el desarrollo de las competencias que se persiguen dentro del eje lógico matemático.

En definitiva, la propuesta matemática y didáctica planteada permite el desarrollo de las siguientes competencias, con sus correspondientes indicadores (al lector no le costará mucho justificar su presencia en los diversos puntos de la propuesta):

Primera competencia: Desarrolla procesos lógicos

- Observa, relaciona y compara información, estableciendo semejanzas y diferencias.
- Describe, analiza y sintetiza información.
- Regresa al punto de partida de sus razonamientos.
- Aplica sus conocimientos a situaciones nuevas.
- Analiza diferentes alternativas para una situación.
- Toma decisiones y busca soluciones a los problemas, sobre la base de un análisis previo de la situación.
- Genera productos, soluciones y técnicas ingeniosas.

Segunda competencia: Elabora y aplica modelos

- Observa la realidad para representarla en un modelo matemático coherente.
- Aplica modelos conocidos en situaciones nuevas, utilizando criterios de semejanzas y diferencias.
- Reconoce, describe y crea patrones.
- Analiza y representa relaciones mediante gráficos.
- Analiza y representa relaciones mediante tablas.
- Analiza y representa relaciones mediante reglas.

Tercera competencia: Resuelve problemas matemáticos

- Considera la posibilidad de distintas alternativas para resolver un problema.
- Plantea posibles soluciones, las ensaya, construye y reconstruye sobre nuevas hipótesis, hasta alcanzar una solución válida.
- Sabe controlar el proceso de resolución de un problema.
- Analiza si el resultado obtenido es correcto o no.
- Sabe conjugar la iniciativa personal con el trabajo solidario en grupo para resolver problemas.

Cuarta competencia: Comunica ideas matemáticas

- Posee dominio del lenguaje, oral y escrito, correspondiente a su edad.
- Domina el vocabulario básico para una adecuada expresión matemática, incluyendo el manejo pertinente de los signos y símbolos.
- Hace cálculos mentales y expresa verbalmente la solución del problema.

Quinta competencia: Posee sentido numérico

- Establece relaciones más que, menos que, tantos como.
- Reconoce, comprende y aplica el significado del cero.
- Realiza aproximaciones adecuadas a cantidades
- Ubica la posición de un elemento en una fila.

- Conoce y aplica los principios del sistema de numeración posicional decimal, así como lo relativo al valor absoluto y relativo de los dígitos.
- Ha consolidado la noción de número, con sus diversas funciones: nombrar, escribir, leer, contar, ordenar y medir.
- Sabe seleccionar el sistema de representación más adecuado para un número, de acuerdo con la operación solicitada.
- Es capaz de decidir la pertinencia de determinada operación, en función del problema a resolver.
- Conoce y aplica diversas técnicas de cálculo para realizar correctamente las operaciones aritméticas.
- Realiza estimaciones de cálculo.
- Conoce y aplica las propiedades de las distintas operaciones, particularmente en el ejercicio del cálculo mental.

La evaluación de competencias en los alumnos

Consecuentemente, también queda claro que no podemos evaluar la presencia de estos indicadores de tales competencias si no hemos propiciado esa presencia mediante un proceso instruccional integral, tal como el propuesto, orientado a desarrollar los saberes matemáticos -captar todo el contenido conceptual y, del mismo, derivar el contenido procedimental en un contexto de diversidad- y los saberes tecnológicos -desarrollar el sentido de saber cuándo utilizar el modelo de la sustracción para determinadas situaciones de la vida diaria- presentes en el tema.

Para llevar a cabo la evaluación de la presencia de estos indicadores en sus alumnos, el docente debe empezar por familiarizarse con la propuesta matemática y didáctica, por adquirir destreza en el manejo de los contenidos conceptuales y procedimentales, y en el planteamiento y la resolución de situaciones y problemas. Al pasar por esta experiencia personal, el docente debe evaluarse en forma continua y, así, ser capaz de descubrir en sí mismo la presencia de esos indicadores, con los matices correspondientes. Sólo después estará en condiciones de evaluar a sus alumnos, actividad que le resultará más sencilla de lo que puede parecer inicialmente.

Actividad 2:
Construir y aplicar el concepto y los procedimientos de los valores centrales de una distribución de datos

Los valores centrales de una distribución de datos

Las medidas de tendencia central -o valores centrales, o medidas centrales- de un conjunto de datos son valores que, en cierto modo, *representan al conjunto* completo, cada uno a su manera. Se trata de la *media*, la *mediana*, y la *moda*. Habitualmente solemos reducir el estudio de estas medidas a su determinación cuando se suministra un conjunto explícito de datos –agrupados o no-, tomando como base el recuerdo de su concepto por parte de los alumnos. Como veremos, hay que superar este enfoque tan reducido y tan reductor, con el fin de entender y utilizar estos valores con toda su riqueza conceptual, procedimental y de aplicación.

Empecemos por recordar las características de cada valor central.

La media aritmética

La media aritmética, puesto que también pueden calcularse la geométrica y la armónica- indica el *valor promedio* de todos los datos. Digamos rápidamente que, para obtenerla, se suman todos los datos y se divide entre el número de datos considerados. Pero hay que insistir en que, en realidad, la media es el valor que cada sujeto de la población tendría si se repartiera "equitativamente" entre todos el valor de la suma total de los datos de la población; de aquí su carácter representativo como valor promedio.

Pero es importante destacar que este carácter de valor representativo del conjunto de los datos no significa que la media deba coincidir con alguno de esos datos. Por ello hay que ofrecer diversos casos para la consideración de los alumnos, con el fin de que evalúen en cada situación el carácter de representatividad de la media. Por ejemplo:

1❖ Sea el conjunto de datos: 11, 7, 10, 9, 10, 8, 7, 10
La media es: (11+7+10+9+10+8+7+10) / 8 = 72 / 8 = 9
La media coincide con uno de los datos del conjunto

2❖ Sea el conjunto de datos: 11, 8, 10, 8, 10, 8, 7, 10
La media es: 72 / 8 = 9
La media no coincide con ninguno de los datos del conjunto

3❖ Sea el conjunto de datos: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19
La media es: 145 / 10 = 14,5
La media no coincide con ninguno de los datos del conjunto

La media es la medida de tendencia central de mayor uso, puesto que su cálculo es sencillo (como se verá ahora), se presta a manejos algebraicos (véase también más adelante) y es representativa en el muestreo. Esto último significa que las medias de diversas muestras extraídas de la misma población se parecen más entre sí que las medianas de las mismas muestras –por eso se afirma que la media es más estable que la mediana.

Pero la media corre el riesgo de dejarse influir por los valores extremos de la distribución, si hay alguno de ellos muy distante de los demás. Así, por ejemplo, en el conjunto de datos: 7, 5, 3, 8, 4, 5, 3, 61, la media es: 96 / 8 = 12, valor que está afectado por el último dato (la media de los siete primeros datos es 35 / 7 = 5) y que no representa realmente al conjunto de los ocho datos.

El cálculo de la media

Hace un rato mencionábamos el método básico para *calcular la media* de una distribución de datos: obtener la suma de todos ellos y dividir esta suma entre el número total de datos. Veamos algunas formas prácticas de hacer este cálculo.

1❖ Este método básico suele resumirse en la *fórmula habitual*:

Si denotamos los *n* datos del conjunto con los símbolos X_1, X_2, ..., X_n, la fórmula que permite calcular el valor de la media se expresa así:

$$\bar{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n) / n \qquad (1)$$

Para abreviar esta expresión suele utilizarse el símbolo Σ (letra griega sigma mayúscula), que significa la operación de sumar. Entonces, la fórmula anterior se escribe:

$$X = (1/n) \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad (2)$$

En la sumatoria, el subíndice *i* varía desde 1 hasta *n*. Es decir, la expresión del numerador nos está diciendo: "suma X_1, más X_2,..., hasta llegar al último sumando, X_n. Después, divide entre *n* el resultado de esa suma".

2❖ Utilizar la *calculadora*. Si ésta posee funciones estadísticas, basta con introducir los datos y pulsar luego la tecla correspondiente a la media. Si la calculadora no posee tales funciones, podemos efectuar la suma progresiva de todos los datos (directamente o en el registro de memoria M+) y dividir el resultado final entre el número de datos.

Este es uno de los casos en que la calculadora puede servirnos como herramienta de trabajo en el aula, aliviándonos del tedioso trabajo de efectuar sumas tan largas. Lo importante es conocer el significado de lo que estamos haciendo y su por qué; garantizado este conocimiento conceptual, bienvenida sea la calculadora. Claro, si no se dispone de ella, se puede recurrir al cálculo con papel y lápiz y a la fórmula (1).

3❖ Construir una *tabla de frecuencias* para ayudarnos a organizar la información y a hacer los cálculos. Supongamos que las edades de un grupo de 20 niños son las siguientes: 8, 7, 8, 6, 9, 7, 8, 6, 7, 7, 8, 8, 6, 10, 9, 10, 7, 8, 7 y 10 años. Si sólo necesitamos conocer la media de sus edades, podemos calcularla mentalmente, utilizar la fórmula (1), o bien, podemos recurrir a la calculadora.

Pero si queremos conocer algo más acerca de la distribución de las edades, procedemos a la construcción de la tabla de frecuencias correspondiente:

Datos

Datos X_i	**Frecuencias** f_i	**Productos** $X_i \cdot f_i$
6	3	18
7	6	42
8	6	48
9	2	18
10	3	30
Totales	N = 20	156

Cuando los datos están agrupados en una tabla de frecuencias, la expresión adecuada (fórmula) es:

$$\overline{X} = (1/n) \sum_{i=1}^{k} f_i \cdot X_i \qquad (3)$$

en la que X_i (*i* varía desde 1 hasta *k*) indica cada uno de los valores *distintos* de los datos (en el ejemplo, son cinco: 6, 7, 8, 9 y 10), y en la que f_i denota la frecuencia del correspondiente dato X_i. Esta fórmula es, en realidad, una expresión muy relacionada con la (2) ya que si todos los datos de la distribución son distintos ($f_i = 1$, $k = n$: ¿por qué?), la fórmula (3) se convierte en la (2).

Al dividir 156 entre 20 obtenemos la media: 7,8 años. Pero, adicionalmente, obtenemos otras informaciones de la tabla. Por ejemplo, su distribución por grupos de edades; los grupos más numerosos (las modas, que en este caso son 7 y 8 años: la distribución es bimodal); el grupo menos numeroso (el de 9 años); la mediana (8 años, que es el promedio de las edades de los niños que se encuentran en las posiciones 10 y 11 de la distribución ordenada de menor a mayor edad, o de mayor a menor edad: 8 años para ambos niños); cuántos niños tienen menos de 9 años (se suman las frecuencias correspondientes a 6, 7 y 8 años: 3 + 6 + 6 = 15 niños; o bien, se restan de 20 las frecuencias correspondientes a 9 y 10 años: 20 – (2 + 3) = 20 – 5 = 15 niños); etc.

Como puede observarse, se sugiere la elaboración y el uso de la tabla de frecuencias cuando la tarea a realizar vaya más allá del mero cálculo de la media. De hecho, la conveniencia y utilidad de tal elaboración debe discutirse con los alumnos, en función de la tarea a realizar, del número y magnitud de los datos a manejar, de las posibilidades de obtener una información más variada y compleja, y de proceder a una toma de decisiones más pertinente. Lo interesante es que la ejercitación en el campo de la estadística surja como una necesidad para los alumnos, bien sea para enfrentar situaciones de su vida diaria u otras que broten de la ejecución de diversos proyectos pedagógicos, siempre con la idea de organizar y facilitar la interpretación de datos de información.

4❖ Tomar de entrada un valor imaginario para la media y luego ajustarlo con los datos. Veamos qué significa esto. En el caso de la distribución anterior, tomemos 8 como valor de entrada de la media de edades de los 20 niños. Ahora recorremos ese conjunto de datos y anotamos la diferencia de cada uno de ellos con respecto a 8:

Datos	8	7	8	6	9	7	8	6	7	7	8	8	6	10	9	10	7	8	7	10	**Total**
dif +					1									2	1	2				2	8
dif -		1		2		1		2	1	1			2				1		1		12

La suma de las diferencias positivas es 8 y la de las negativas, 12. Al compensarse entre ambas, nos queda una diferencia negativa de 4. ¿Diferencia respecto a qué? A la suma total de los 20 datos, si todos hubieran tenido el valor de la media, 8. Esta suma total hubiera sido: 20 x 8 = 160. Por consiguiente, la suma total verdadera de los 20 datos es: 160 – 4 = 156. Ahora se divide entre 20 y obtenemos la media: 7,8 años.

También podemos proceder dividiendo esa diferencia negativa final, 4, entre los 20 datos, lo que nos da el valor negativo de 0,2 para cada dato; esto significa que basta restar ahora este valor de la supuesta media inicial 8, con lo que obtendremos la media verdadera: 8 – 0,2 = 7,8 años.

En principio, este procedimiento puede parecer engorroso, pero la verdad es que puede hacerse *mentalmente*, recorriendo los datos uno por uno y compensando sucesivamente las diferencias positivas y negativas sobre la marcha: “7 me da 1 negativo; 6 me da 2 negativos, llevo 3 negativos; 9 me da 1 positivo, llevo 2 negativos; 7 me da 1 negativo, llevo 3 negativos; etc.”.

Como puede verse, este procedimiento nos da mayor soltura en el cálculo, más que si utilizáramos los datos reales, que siempre son más "pesados" de manejar. Además, tenemos libertad para elegir el valor inicial para la media que, incluso, puede no coincidir con ninguno de los datos.

Por ejemplo, podríamos haber tomado 7 como valor inicial; o incluso, 7,5... En estos casos, ¿cómo hubieran sido los cálculos de las diferencias? ¿Cómo hubieran sido las sumas finales de las diferencias? ¿Y la media verdadera? Verifíquelo, para salir de dudas... y saque sus propias conclusiones. Y trate de justificarlas. Digamos, finalmente, que el procedimiento que acabamos de describir es ideal para *estimar* (dar un valor aproximado de) la media de una distribución de datos.

Como en el caso de la sustracción, nos encontramos de nuevo con una variedad de procedimientos a la hora de calcular la media de un conjunto de datos. La propuesta de esta variedad responde al principio orientador de la "generación de diversidad" en la enseñanza de la matemática. Volvemos a insistir en la conveniencia de presentar todas estas modalidades a los alumnos, con el fin de que sean ellos mismos los que tomen la decisión de seleccionar la que consideren más apta para cada situación concreta.

La mediana

La mediana es el valor que, una vez *ordenados* todos los datos, se encuentra *en el "medio"*, en la mitad de la distribución. Si el número de datos es impar, coincidirá con uno de los datos; si es par, puede que no ocurra esa coincidencia: hay que promediar los dos valores que se hallen en el centro de la distribución ordenada. Como en el caso de la media, resulta pertinente mostrar a los alumnos esta variedad de situaciones. Por ejemplo:

1 ❖ Sea el conjunto de datos: 11, 7, 10, 9, 10, 8, 7, 10, 9
Ordenado de menor a mayor: 7, 7, 8, 9, 9, 10, 10, 10, 11
Valor central (en la quinta posición): 9
9 es la mediana del conjunto
La mediana coincide con uno de los datos del conjunto

2 ❖ Sea el conjunto de datos: 10, 13, 12, 19, 17, 11, 15, 14, 16, 18
Ordenado de mayor a menor: 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13 12, 11, 10
Valores centrales: 15 y 14
Mediana: (15 + 14) / 2 = 14,5
La mediana no coincide con ninguno de los datos del conjunto

3 ❖ Sea la distribución de datos:

X	f
12	4
14	5
15	1
17	8
20	2

Obsérvese que hay 20 datos.
Los datos centrales son los que ocupan los lugares 10° (15) y 11° (17)
La mediana es: (15 + 17) / 2 = 16
La mediana no coincide con ninguno de los datos de la distribución

Conviene hacer observar a los alumnos que la mediana también se calcula fácilmente y –a diferencia de la media- no está influida por los valores extremos, aunque tampoco nos dice nada de cómo son en realidad los datos de ambas mitades de la distribución, sobre todo acerca de su diferencia respecto a la mediana. A este respecto, se puede hacer observar que estos dos conjuntos ordenados de datos:

1, 3, 3, 3, 4, 14, 21, 27, 27, 27, 27

12, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 16

tienen la misma mediana (14), pero difieren significativamente entre sí.

La moda

La moda es, sencillamente, el valor que *más se repite*, y en este sentido se convierte en representativo del conjunto de datos. Hay que hacer notar, por lo tanto, que puede haber una o más modas en la distribución de los datos. Lo que sí es cierto –a diferencia de lo que ocurre con la media y la mediana- es que la moda siempre coincide con un dato de la distribución. Y que es la única medida de tendencia central que puede obtenerse cuando los datos son cualitativos; por ejemplo, si se trata de la distribución de preferencias por colores, mascotas, o gustos de helados; o la distribución por lugares de origen, etc.

Como en los casos de la media y de la mediana, resulta útil hacer ver la variedad de situaciones que pueden presentarse con respecto a la moda de una distribución. Así, por ejemplo:

1 ❖ Sea el conjunto de datos: 7, 12, 8, 7, 10, 10, 8, 9, 12, 10
La moda es 10 (se repite 3 veces)
La distribución es unimodal

2 ❖ Sea el conjunto de datos: 8, 7, 15, 13, 7, 10, 13, 15, 9, 11
La moda corresponde a los valores 7, 13 y 15 (se repiten dos veces cada uno)
La distribución es trimodal

De la moda no hay mucho más que decir, salvo insistir en su ambigüedad: puede darse incluso el caso en que no represente a un valor del centro de la distribución, sino extremo. Por ejemplo, en el siguiente conjunto de datos: 11, 13, 16, 17, 18, 20, 20, 20, la moda es 20, que representa al mayor de los datos.

Y ahora, los tres valores juntos

Si bien es necesario, no basta con mostrar separadamente a los alumnos los conceptos y los procedimientos relativos a cada una de las medidas de tendencia central, tal como se acaba de hacer. Lo importante es, en primer lugar, *entender el significado* de cada una de estas medidas de tendencia central y *su relación* entre ellas, en términos de sus similitudes y diferencias.

Los tres valores comparten su carácter de ser *representativos del conjunto de datos*, pero se diferencian en el *matiz* de esta representatividad. Así, la media representa el valor promedio; la mediana, el valor que ocupa la posición central cuando los datos están ordenados según su valor; y la moda, el (los) dato(s) más frecuente(s).

Estos criterios de diferenciación resultan fundamentales a la hora de *decidir cuál es el valor central* que, en cada caso particular y real, nos interesa considerar y calcular. Esta decisión es muy importante, puesto que va más allá del conocer matemático y se inserta en el ámbito del conocer tecnológico.

A la luz de estas consideraciones, resulta pertinente que los alumnos -hacia el final de la Segunda Etapa y en la Tercera Etapa de EB- puedan plantearse y resolver situaciones como las siguientes:

- Supongamos que tenemos la distribución de las edades de los alumnos del salón de clase y que calculamos los valores de sus medidas de tendencia central. ¿Qué significa la media de tales edades? ¿y la mediana? ¿y la moda? ¿alguna de estas medidas es más representativa del conjunto de edades que las demás? ¿o todas ellas tienen algo peculiar que aportar?
- Para poder proceder a su posterior dotación, acabamos de obtener la distribución de datos referentes a las tallas de zapatos, franelas, y pantalones o faldas de todos los niños y niñas del plantel. En cada una de estas cuatro distribuciones, ¿qué sentido tiene obtener la media de las tallas? ¿y la mediana? ¿y la moda? ¿alguna de estas medidas es más representativa que las demás? ¿podemos prescindir de alguna(s) de estas medidas, tomando en cuenta el objetivo de su recolección?
- Con referencia a las dos situaciones anteriores y obtenidos los valores centrales de las distribuciones de edades y de tallas de los alumnos del salón de clase, se sugiere hacer lo mismo con los alumnos de otro salón del mismo grado y compara los valores centrales. ¿A qué conclusiones se puede llegar? ¿qué tipo de reflexiones nos sugieren estos valores y esta comparación?
- Invente una situación en la que Ud. va a recabar unos datos y en la que la moda sea el valor más representativo del conjunto. Análogamente para la mediana. Y, finalmente, para la media.
- En un salón de 7° grado hay un grupo numeroso de alumnos muy capaces. Si las calificaciones en Matemática se dan en la escala de 1 a 20, ¿qué media de calificaciones puede esperarse? ¿Y qué mediana? ¿Y qué moda? ¿Es probable que la moda sea alta?
- Si la mediana de un grupo de calificaciones de Biología es 14 (en la escala de 1 a 20), ¿puede decirse que el grupo, en promedio, aprobó? ¿Por qué?
- Y si, en una situación análoga a la anterior, la moda es 14, ¿puede decirse que el grupo, en promedio, aprobó?

Del mismo modo, conviene adquirir cierta experiencia no sólo en el cálculo de los valores centrales, conocidos los datos, sino también en la situación inversa, es decir, en la *construcción de posibles distribuciones de datos a partir del conocimiento de las me-*

didas centrales. De esta forma, los alumnos deben estar también en capacidad de plantearse y resolver situaciones como las siguientes:

- ¿Pueden coincidir las tres medidas centrales en una misma distribución de datos? Si su respuesta es positiva, construya un ejemplo de tal distribución. Si es negativa, explique por qué.
- Construya ahora, si es posible, una distribución en la que no coincida ninguna de las tres medidas.
- Ídem, en la que coincidan la media y la mediana, pero no así la moda.
- Ídem, en la que coincidan la moda y la mediana, pero no así la media.
- Ídem, en la que coincidan la media y la moda, pero no así la mediana.
- Veamos ahora el siguiente cuadro de posibles casos de calificaciones:

Caso	**Media**	**Mediana**	**Moda**
1	12	12	12
2	15	13	18
3	11	10	08
4	12	16	11

  Suponga que el curso está integrado por 20 alumnos. Para cada uno de los 4 casos construya, si es posible, una distribución de datos que se ajuste a los valores dados de las medidas de tendencia central.

- El grupo de alumnos que viven en la misma manzana está compuesto por Rosa, Javier, Franklin, Emilia, Ana y Rubén. El grupo tiene una edad promedio de 12 años. Sabemos que Rosa y Javier tienen 10 años cada uno; Ana tiene 14 años; Franklin, 12; y Emilia, 15. ¿Cuántos años tiene Rubén?
- En el caso que sigue, vamos a calcular la media redondeada, es decir, si las décimas llegan o pasan de 5, se considera el siguiente número entero; en caso contrario, se suprimen las décimas. En cierto salón, las notas de Castellano de Luis y de Rosa fueron de 14 puntos; Gustavo sacó 16. La nota promedio (redondeada) del grupo fue 20. ¿Es posible esta situación? Si lo es o no lo es, ¿de qué depende?

Por otro lado, también deben llegar docentes y alumnos a manejar con soltura situaciones en las que se sugieran *transformaciones algebraicas* -cuya posibilidad se mencionó al hablar de la media- que puedan afectar a las medidas de tendencia central. En esta línea, se proponen situaciones como las siguientes:

- ¿Qué le ocurre (o le puede ocurrir) a la media de un conjunto de datos si se elimina de dicho conjunto: a) el dato mayor; b) el dato menor; c) un dato de valor igual a la media; d) un dato de valor igual a la mediana; e) un dato de valor igual a la moda?
- En una distribución de datos se eliminó un dato y: a) la media no se alteró; b) la mediana no se alteró; c) la moda no se alteró. ¿Qué podemos decir, en cada caso, del dato que se eliminó del conjunto? (Se trata de tres casos separados).
- Si en una distribución unimodal se elimina un dato de valor igual a la moda, ¿cambiará la moda de la distribución?
- El promedio de edad de los niños de un salón de 5º grado es de 11 años. ¿Cuál será el promedio de edad del grupo cuando lleguen a 8º grado, si se mantienen los mismos alumnos? ¿Por qué?
- ¿Qué le ocurre a la media de una distribución de datos si:

  a. todos los datos aumentan en 2 unidades?

  b. todos los datos disminuyen en 3 unidades?

  c. la mitad de los datos aumenta en 2 unidades y la otra mitad queda igual?

  d. la mitad de los datos aumenta en 3 unidades y la otra mitad disminuye en 1?
- ¿Qué puede ocurrirle a la mediana en cada uno de los casos anteriores? ¿Se puede decir algo de la moda en esos mismos casos?
- Se ha calculado la media de un grupo de 20 calificaciones. Pero posteriormente, 7 calificaciones suben en 2 puntos, 5 quedan igual, 3 disminuyen en 2 puntos, 2 disminuyen en 3, 1 disminuye en 4, y 1 disminuye en 5 puntos. ¿Qué le ha ocurrido a la nueva media con respecto a su valor anterior?
- En otro caso similar, la mitad de las calificaciones aumenta en 2 puntos cada una, 2 quedan igual, 4 disminuyen en 1

punto y 8 disminuyen en 3 puntos. Pero la media del grupo no varía con respecto a la obtenida antes de estos cambios. ¿De cuántas calificaciones estamos hablando?

Finalmente, es conveniente enfrentar a docentes y alumnos con situaciones de cálculo de los valores centrales en las que se manejen *lotes*, *fracciones o porcentajes* de la población, como por ejemplo:

- En el grupo de alumnos que están en la cancha, la tercera parte tiene 12 años; otra tercera parte tiene 13 años; y los restantes, 17 años. ¿Cuál es la edad promedio de los alumnos que están en la cancha?
- En el salón de clase de Yomaira, 40% de los alumnos vendió 17 boletos cada uno, y el resto de los alumnos, 12 boletos cada uno. ¿Cuál es el promedio de boletos vendidos por cada alumno, si en el salón hay 30 alumnos? ¿Cuál sería este promedio si en el salón hubiera 20 alumnos? Compara esta respuesta con la anterior y saca tus conclusiones.
- Un conjunto de 300 niños se reparte en lotes de 10 niños. En cada lote, los niños tienen exactamente las siguientes edades: 3 niños, 8 años; 2 niños, 9 años; 1 niño, 10 años; y 4 niños, 11 años. ¿Cuál es la media de las edades de los 300 niños? ¿Y la mediana? ¿Y la moda?
- En otro grupo similar de 300 niños la distribución en lotes de 10 niños se ha hecho del siguiente modo: 8 lotes de niños de 7 años; 2, de 9 años; 7, de 8 años; 4, de 10 años; 6, de 10 años; y 3, de 11 años. ¿Cuál es la media de las edades de los 300 niños? ¿Y la mediana? ¿Y la moda?

Llegar al conocer reflexivo

Las últimas consideraciones han insistido en manejar conjuntamente los tres valores centrales y en diferenciarlos desde el punto de vista conceptual y procedimental. Este deslinde resulta muy importante y en él interviene el saber tecnológico, es decir, el que nos permite decidir acerca del valor central más pertinente a calcular en cada caso concreto.

Pero hay algo más. Porque incluso, en ocasiones, es posible alcanzar los niveles del conocer reflexivo, es decir, llegar a analizar qué significan los resultados obtenidos (media, mediana, moda) desde el punto de vista de la situación estudiada y desde una perspectiva sociocultural y ética, qué conclusiones pueden derivarse de ellos, qué reflexiones nos sugieren para nuestro comportamiento individual y colectivo diario.

Indudablemente, la acotación anterior nos está indicando que tenemos que traer a consideración en el aula situaciones de interés de la vida diaria de los alumnos o de la comunidad. Tales situaciones pueden referirse a variables antropométricas (edad, peso, talla…), familiares (características de la familia, de consumo, de la vivienda…), sociales (empleo, ingresos familiares, problemas de la comunidad, organización comunitaria…) y otras por el estilo. Variables de las que es posible obtener información por diversas vías; entre ellas, por medio de encuestas.

En todos estos casos conviene -como se dijo anteriormente- que exista como cierta necesidad de estudiar estas situaciones, de tal forma que se trascienda la percepción de que se trata de un simple ejercicio escolar sin mayores consecuencias. Y también, que el estudio no se limite a la organización de los datos y a los cálculos pertinentes.

Porque, a estas alturas, tiene que quedarnos claro que el tema de las medidas de tendencia central tiene como meta poder abordar y analizar situaciones relativas a datos de información que nos sean relevantes, a nosotros y a nuestros alumnos, para lo cual requerimos estar en capacidad de:

- decidir cuál es la medida central más adecuada para el análisis de la situación propuesta (conocer tecnológico)
- aplicar correctamente los procedimientos necesarios para obtener los valores requeridos (conocer matemático)
- comprender el significado de los resultados obtenidos así como su interpretación desde las perspectivas sociocultural y ética, y saber extraer las conclusiones pertinentes que promuevan una posible acción transformadora (conocer reflexivo)

Todas las explicaciones y toda la ejercitación propuestas anteriormente -necesarias, por otro lado- tienen la finalidad de permitirnos acceder a una capacitación como la que se acaba de señalar.

El desarrollo de competencias en los alumnos

Como en el caso del tema de la sustracción, queremos insistir en que sólo una enseñanza referida a las medidas de tendencia central planteada de esta forma -o de otra muy similar- puede garantizar el desarrollo de las competencias que se persiguen dentro del eje lógico matemático.

En definitiva, la propuesta matemática y didáctica planteada permite el desarrollo de las siguientes competencias, con sus correspondientes indicadores (al lector no le costará mucho justificar su presencia en los diversos puntos de la propuesta…):

Primera competencia: Desarrolla procesos lógicos

- Observa, relaciona y compara información, estableciendo semejanzas y diferencias.
- Describe, analiza y sintetiza información.
- Regresa al punto de partida de sus razonamientos.
- Aplica sus conocimientos a situaciones nuevas.
- Analiza diferentes alternativas para una situación.
- Toma decisiones y busca soluciones a los problemas, sobre la base de un análisis previo de la situación.
- Genera productos, soluciones y técnicas ingeniosas.

Segunda competencia: Elabora y aplica modelos

- Observa la realidad para representarla en un modelo matemático coherente.
- Aplica modelos conocidos en situaciones nuevas, utilizando criterios de semejanzas y diferencias.
- Analiza y representa relaciones mediante tablas.
- Analiza y representa relaciones mediante reglas.

Tercera competencia: Resuelve problemas matemáticos

- Planifica estrategias de solución de problemas, teniendo en cuenta la claridad de las metas.
- Ante el enunciado de un problema, sabe formular hipótesis.

- Considera la posibilidad de distintas alternativas para resolver un problema.
- Plantea posibles soluciones, las ensaya, construye y reconstruye sobre nuevas hipótesis, hasta alcanzar una solución válida.
- Sabe controlar el proceso de resolución de un problema.
- Analiza si el resultado obtenido es correcto o no.
- Sabe plantear nuevos enunciados de problemas a partir de los ya resueltos.
- Sabe conjugar la iniciativa personal con el trabajo solidario en grupo para resolver problemas.

Cuarta competencia: Comunica ideas matemáticas

- Posee dominio del lenguaje, oral y escrito, correspondiente a su edad.
- Domina el vocabulario básico para una adecuada expresión matemática, incluyendo el manejo pertinente de los signos y símbolos.
- Hace cálculos mentales y expresa verbalmente la solución del problema.
- Lee, interpreta y expresa datos cuantitativos y cualitativos.

Séptima competencia: Sabe procesar e interpretar información

- Siente la necesidad de ser ordenado y sistemático en sus cosas, actividades y tareas escolares.
- Recolecta datos de naturaleza continua y discreta en su entorno.
- Describe, interpreta y saca conclusiones en forma oral y escrita acerca de la información que proporcionan tablas relativas a situaciones del entorno.
- Elabora tablas con datos referentes a situaciones escolares, ambientales y sociales.
- Persevera en la realización de estudios estadísticos, desde la recolección de datos hasta la interpretación de los resultados.

La evaluación de competencias en los alumnos

En cuanto a la evaluación de las competencias de los alumnos, sólo es posible si se desarrolla la propuesta matemática y didáctica presentada anteriormente, u otra similar, repetimos lo que se propuso en el caso del tema de la sustracción: para llevar a cabo la evaluación de la presencia de estos indicadores en sus alumnos, el docente debe empezar por familiarizarse con la propuesta matemática y didáctica, por adquirir destreza en el manejo de los contenidos conceptuales y procedimentales, y en el planteamiento y la resolución de situaciones y problemas. Al pasar por esta experiencia personal, el docente debe evaluarse en forma continua y, así, ser capaz de descubrir en sí mismo la presencia de esos indicadores, con los matices correspondientes. Sólo después estará en condiciones de evaluar a sus alumnos, actividad que le resultará más sencilla de lo que puede parecer inicialmente.

A modo de colofón

No sabemos qué impresiones te habrá dejado, estimado(a) lector(a), la lectura de este *Proceso Educativo*. Pero probablemente destaque la necesidad de manejar con suficiencia y soltura el conocimiento matemático, con toda su riqueza de conceptos y procedimientos, y de relaciones entre ambos. Porque, como lo habrás percibido, ahí está la base de cualquier planteamiento didáctico orientado al desarrollo de las competencias de nuestros alumnos, y también el fundamento de la autonomía con la que puedes y debes moverte en el aula de matemática.

Evidentemente, no es posible -dentro de los límites de este *Proceso Educativo*- tocar todos los temas matemáticos a los que hacen referencia nuestros programas escolares de matemática. Este es un trabajo más extenso que tendremos que abordar en el futuro y entre todos. Pero en este momento es importante que nos quede, no una sensación de desaliento al ver la magnitud de la tarea que tenemos por delante en lo referente a nuestra formación, sino el sentimiento de que la tarea es posible y de que somos capaces de abordarla con entusiasmo y con éxito.

La intención de este Cuaderno ha sido justamente la de aportar dos granitos de arena que nos permitan vislumbrar de qué modo podemos avanzar en el desarrollo del Eje de pensamiento lógico matemático. El estudio y la reflexión sobre nuestra praxis pedagógica, compartidos con nuestros colegas, quizá nos permitan aportar otros granitos para compartir entre todos…

BIBLIOGRAFÍA

Alsina, C. y otros (1996). *Enseñar Matemáticas*. Barcelona, Graó.

Casa, E. (1995). *Divertidas Matemáticas*. Bogotá, Magisterio.

Corbalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona, Graó.

Corbalán, F. (1998). *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Madrid, Síntesis.

D'Amore, B. (1997). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas*. Madrid, Síntesis.

Enzesberger, H. M. (1997). *El diablo de los números. Un libro para todos aquellos que temen a las Matemáticas*. Madrid, Siruela.

Escandón, R. (1996). *Curiosidades matemáticas*, 8ª impr. México, Diana.

Falletta, N. (1989).*Paradojas y juegos. Ilustraciones, acertijos y problemas imposibles*. México, Gedisa.

García de Clemente, C. (1994). *El juego como método de la enseñanza de la Matemática*. Caracas, Autora.

Gardner, M. (1999). *Acertijos matemáticos*. México, Selector.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid, Síntesis.

Gómez Chacón, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid, Narcea.

González, M. P. (1999). *Enseñanza de las matemáticas en la primera etapa y preescolar. Geometría. Medidas de longitud, capacidad, peso, tiempo y monetarias. Probabilidad y Estadística*. Caracas, Fe y Alegría, Centro de Formación Padre Joaquín.

Goñi, J. M. (Coord.) (2000). *El currículo de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona, Graó.

Guzmán, M. de (1993). Enseñanza de la Matemática. En: Gil Pérez, D., Guzmán, M. de, *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid, OEI.

Lizarzaburu, A., Zapata, G. (Comps.) (2001). *Pluriculturalidad y aprendizaje de la matemática en América Latina. Experiencias y desafíos*. Madrid, Morata.

Mora, D. (2002). *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana*. Caracas, EBUC.

Parra, H. (1994). *La enseñanza de las matemáticas en la Escuela Básica*. Caracas, Fe y Alegría, Centro de Formación Padre Joaquín.

Parra, C., Sáiz, I. (Comps.) (1994). *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires, Paidós.

Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica*. Bogotá, una empresa docente.