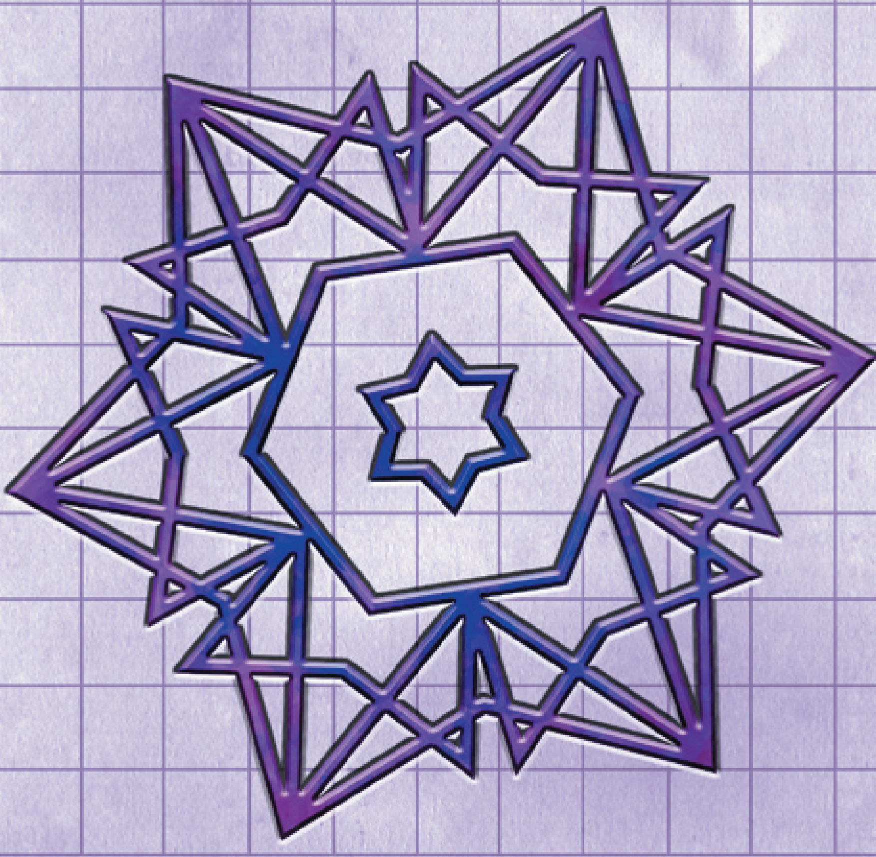
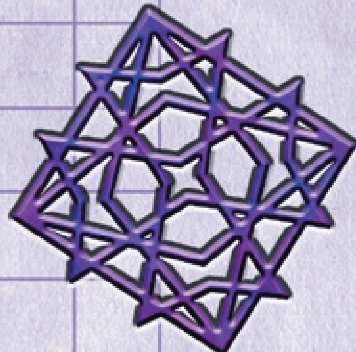
SERIE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO Nº 13

POLÍGONOS. TRIÁNGULOS





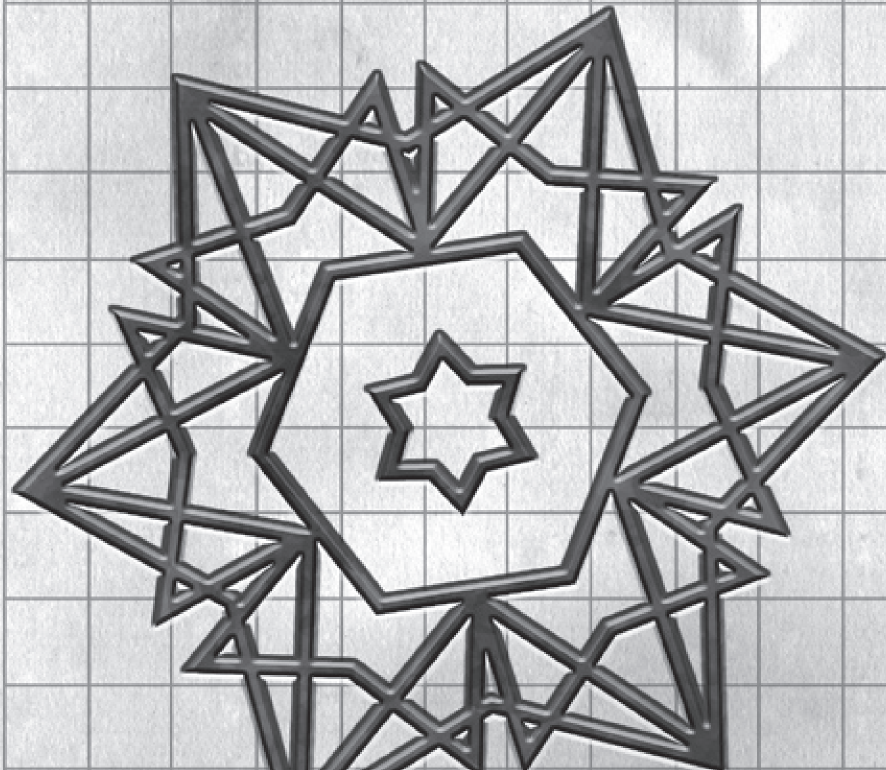
FE Y ALEGRIA

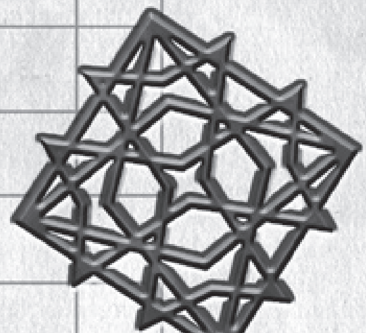
CAF

UNESCO
IESALC

SERIE DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO N° 13

POLÍGONOS. TRIÁNGULOS





MARTÍN ANDONEGUI ZABALA

372.7
And.
Polígonos. Triángulos
Federación Internacional Fe y Alegría,
2006
32 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-6418-89-1
Matemáticas, Geometría

“El principio pedagógico esencial, base y condición de todos los demás, es el amor a los educandos. El educando es amado y enseñado a la vez; y el educando hace crecer y humaniza, mediante el amor, al educador. En educación, es imposible ser efectivos sin ser afectivos.”

Documento del XXXIII Congreso Internacional
Asunción, Paraguay

EQUIPO EDITORIAL
Beatriz Borjas y Carlos Guédez

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Cuaderno N° 13
Polígonos. Triángulos
Autor: Martín Andonegui Zabala

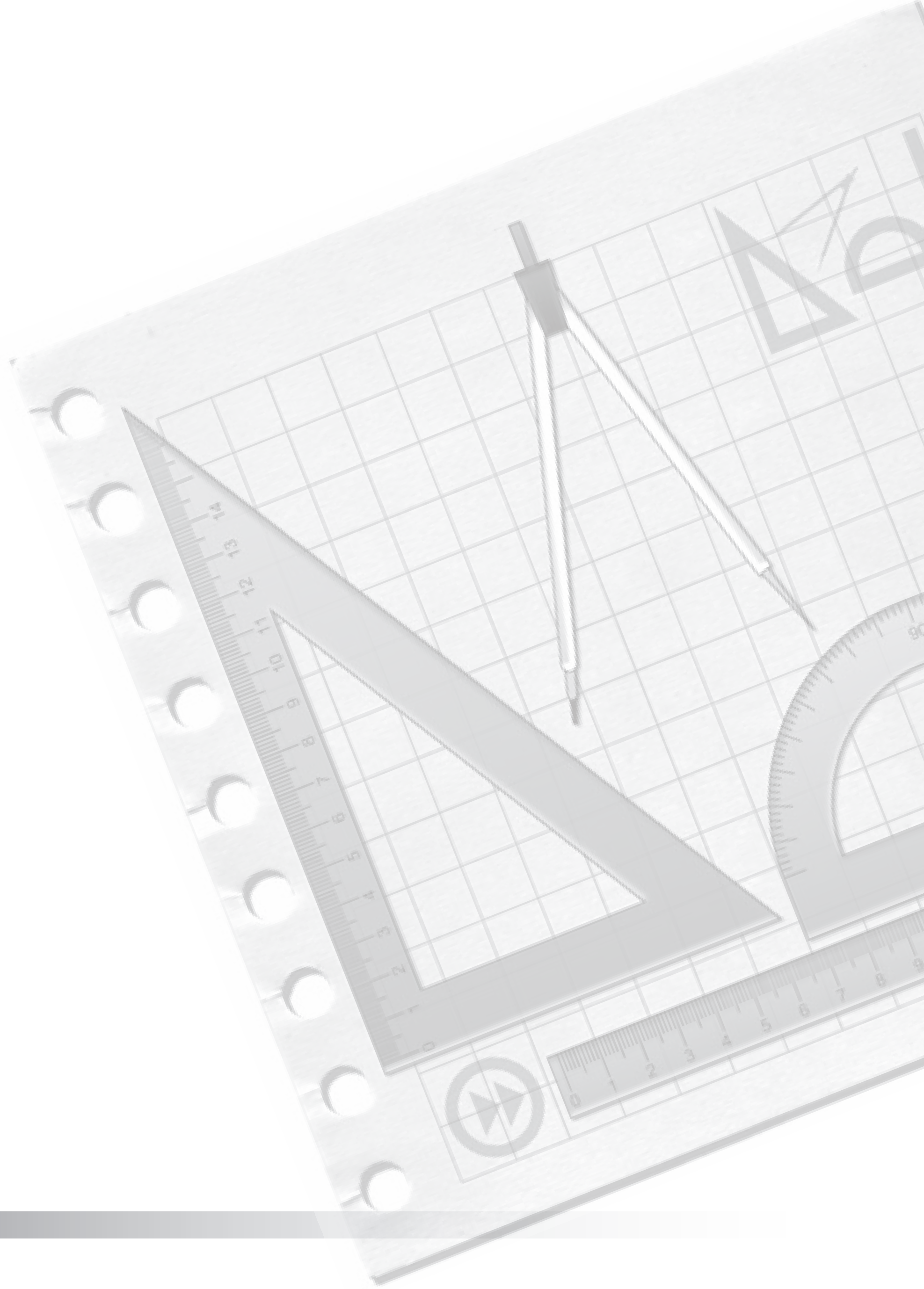
Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del ***Programa Internacional de Formación de Educadores Populares*** *desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.*

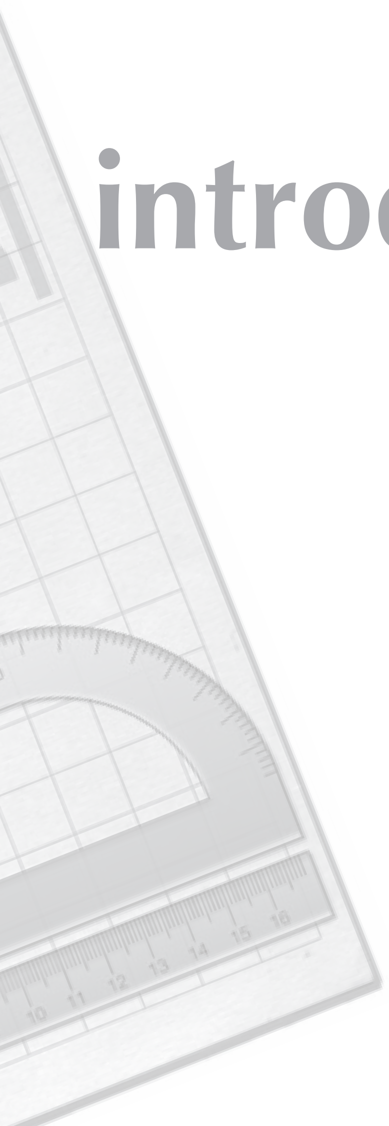
Diseño y Diagramación: ***Moira Olivar***
Ilustraciones: ***Corina Álvarez***
Concepto gráfico: ***Juan Bravo***
Corrección de textos: ***Carlos Guédez y Martín Andonegui***

Edita y distribuye: Federación Internacional de Fe y Alegría. Esquina de Luneta. Edif. Centro Valores, piso 7 Altagracia, Caracas 1010-A, Venezuela. Teléfonos: (58) (212)5631776 / 5632048 / 5647423.
Fax: (58) (212) 5645096
www.feyalegria.org

Depósito legal: lf 60320065104913
Caracas, abril 2006

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis - Instituto internacional para la educación superior en América Latina y el Caribe (IESALC) - Corporación Andina de Fomento (CAF)





introducción

A modo de introducción..., nuestro recordatorio

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno No 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos docentes –docentes de matemática en su momento- y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta última de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de conocimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos –cognitivos, actitudinales, emocionales...- que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel- ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, los polígonos.

1. ¿Qué es un polígono?

En el Cuaderno anterior decíamos que con segmentos situados en rectas diferentes de un mismo plano, y concatenados por sus extremos, se construyen ***líneas quebradas o poligonales***. Estas líneas quebradas pueden ser abiertas, si los puntos libres de los segmentos inicial y final de la cadena no coinciden; o cerradas, en caso contrario. Y cuando en una línea quebrada cerrada no se han cruzado entre sí los segmentos que la componen, decimos que se ha formado un ***polígono***.

Observa las siguientes figuras y determina en cada caso si se trata de una línea poligonal abierta o cerrada y, en este último caso, de un polígono:

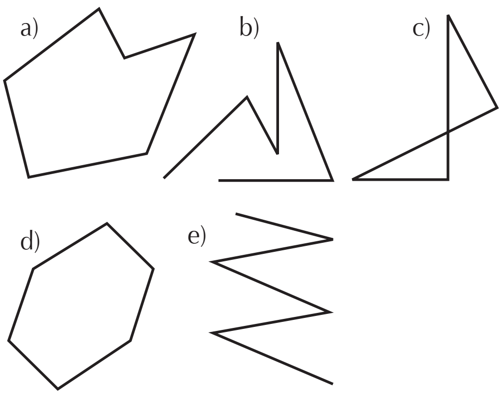


Fig. 1: Líneas poligonales

He aquí las respuestas: a) polígono; b) línea poligonal abierta; c) línea poligonal cerrada, pero no polígono; d) polígono; e) línea poligonal abierta.

Es bueno recordar aquí la etimología de la palabra a partir de sus raíces griegas: ***polígono*** = polus [mucho] + gonia [ángulo] = ***muchos ángulos***.

En todo polígono podemos destacar los siguientes ***elementos o partes: lados, ángulos y vértices***. Los lados son los segmentos de la línea poligonal; los vértices, los puntos de concatenación de dichos segmentos; y los ángulos, los formados por dos segmentos consecutivos, orientados hacia la región interna del polígono. En los polígonos se habla también de las *diagonales (diagonal = dia [a través] + gonia [ángulo] = a través del ángulo)*, que son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos del polígono. Los polígonos se representan colocando letras mayúsculas en sus vértices.

Por otro lado, todo polígono determina dos regiones en el plano: la que queda encerrada dentro de la línea poligonal, y la que queda en su exterior. La primera se denomina ***región poligonal interna***. La segunda, se califica como externa.

Y esos son los elementos que podemos ***medir*** en un polígono: En primer lugar, la ***longitud*** de sus lados, cuya suma total se denomina ***perímetro***. (peri [alrededor] + metron [medida] = medida del contorno); igualmente, la ***longitud de las diagonales***; también la ***amplitud de sus ángulos***, así como su ***suma total***; y la magnitud de ***su región interna***, es decir, el ***área*** del polígono.

Existen diversos criterios para ***clasificar*** los polígonos:

a) ***Según el número de lados***. En general, se habla de un polígono de "tantos" lados. Pero algunos de ellos tienen un nombre particular:

Número de lados	Nombre	Significado literal
3	Triángulo	Tres ángulos (latín)
4	Cuadrilátero	Cuatro lados (latín)
5	Pentágono	Cinco ángulos (griego)
6	Hexágono	Seis ángulos (griego)
7	Heptágono	Siete ángulos (griego)
8	Octógono	Ocho ángulos (griego)
10	Decágono	Diez ángulos (griego)
12	Dodecágono	Doce ángulos (griego)
15	Pentadecágono	Cinco+diez ángulos (griego)

b) ***Según el valor de los ángulos***. Si la medida de cada uno de los ángulos interiores del polígono es menor de 180º, el polígono se denomina ***convexo***; en caso contrario, ***cóncavo***. Dicho de otra manera, si al tomar dos puntos cualesquiera de la región poligonal interna, el segmento que los une queda todo él dentro de esa región poligonal, hablamos de un polígono convexo, es decir, sin "entrantes". Un polígono se califica como cóncavo cuando presenta algún entrante, es decir, algún ángulo interior de medida mayor que 180º. En la fig.1, el dibujo a) representa un polígono cóncavo.

c) ***Según la congruencia de sus lados y de sus ángulos***. Si todos los lados de un polígono son congruentes entre sí, y también lo son todos sus ángulos, el polígono se denomina ***regular***. E ***irregular*** en caso contrario.

Clasifica cada uno de los siguientes polígonos de acuerdo a los tres criterios mencionados:

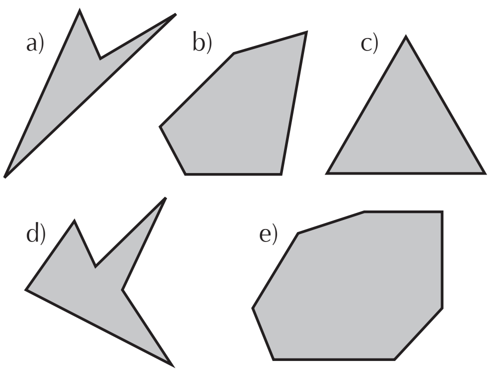


Fig. 2: Polígonos

He aquí las respuestas: a) Cuadrilátero cóncavo irregular; b) Pentágono convexo irregular; c) Triángulo convexo regular; d) Hexágono cóncavo irregular; e) Heptágono convexo irregular. Y una pregunta adicional:

1. ¿Puede haber algún polígono cóncavo regular? ¿Por qué?

¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de n lados?

Dibuje un polígono convexo del número de lados que usted quiera. Observe que de cada vértice salen tantas diagonales como vértices tiene el polígono, menos 3; es decir, n – 3. Desde todos los vértices se podrían dibujar en total n x (n – 3) diagonales. Pero al hacerlo así, se habrían dibujado todas las diagonales dos veces. Por consiguiente, el producto anterior debe dividirse entre 2, para no contar diagonales repetidas. Así, pues, ***un polígono convexo de n lados tiene*** $\frac{nx(n-3)}{2}$ ***diagonales***. Verifíquelo para varias clases de polígonos.

2. Un polígono convexo tiene 54 diagonales. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Observe la tabla siguiente en la que se relacionan el número de lados de un polígono convexo y el número de diagonales de tales polígonos, y responda a las preguntas que siguen:

Nº de Lados	Nº de diagonales
4	2
5	5
6	9
7	14
8	20
9	27
10	35
11	44
...	...

a) ¿Cómo aumenta la sucesión del número de diagonales?

b) En particular, ¿qué ocurre cuando el número de lados del polígono es impar?

c) ¿Y cuando el número de lados es par?

2. Triángulos

Un triángulo es un ***polígono de tres lados***. Es el más elemental de todos los polígonos, lo que hace que tenga ciertas particularidades:

- no existen triángulos cóncavos
- es el único polígono convexo que no tiene diagonales
- es el único polígono en el que se puede hablar, sin equívocos, de lados opuestos a

ángulos, y viceversa; por eso, el lado BC opuesto al ángulo de vértice en A puede denotarse también como a, y así en los demás casos

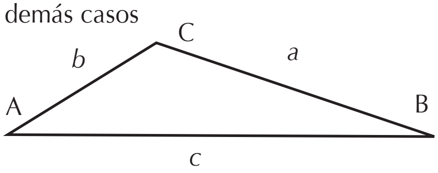


Fig. 3: Triángulo

2.1. Construcción de un triángulo

Tome tres alambres, palitos, tiras de papel, o algo similar que sea rectilíneo, de las siguientes medidas: a) 8, 5 y 8 cm b) 12, 4 y 6 cm c) 13, 12 y 5 cm d) 16, 8 y 8 cm e) 15, 9 y 7 cm. Trate de construir con ellos un triángulo en cada caso. Y antes de continuar con la lectura, trate de establecer la razón que impide la construcción de un triángulo en los casos en los que no se puede.

¿En cuáles de los cinco casos propuestos no ha sido posible construir un triángulo? Sin duda habrá llegado a la respuesta: en los b) y d). Si nos ponemos a pensar en qué se diferencian estos casos de los otros tres llegaremos a la siguiente conclusión: en ambos casos, la longitud del segmento mayor no es menor que la suma de las longitudes de los otros dos segmentos. Así, en el b): 12 > 4 + 6; y en el d): 16 = 8 + 8.

Para que tres segmentos puedan constituir un triángulo ***es necesario que la longitud del segmento mayor sea menor que la suma de las longitudes de los otros dos segmentos.***

Establecida esta condición ya podemos describir la forma de ***construir un triángulo conocidas las medidas de tres segmentos***: Con el compás se abarca la longitud de uno de los segmentos; se ubica este segmento AB en el plano. Desde el vértice A y con una abertura del compás equivalente a la medida del segundo segmento, se traza un arco. Se realiza la misma operación desde el vértice B, con una abertura del compás equivalente a la medida del tercer segmento. Desde el punto C en que se cortan los dos arcos se trazan sendos segmentos CA y CB y el triángulo queda construido. Podemos designarlo: Δ ABC

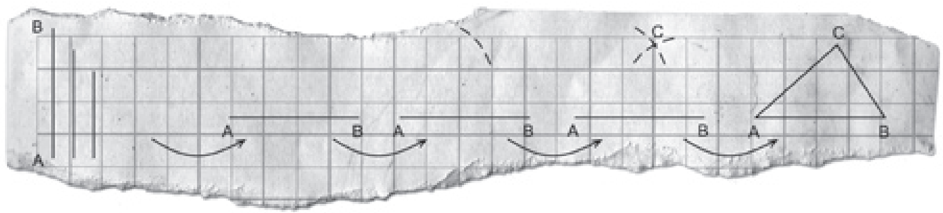
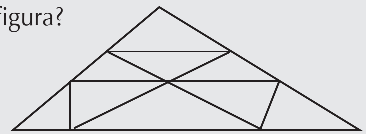


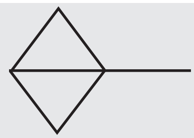
Fig. 4: Construcción de un triángulo dadas las medidas de sus tres lados

3. Si le dan las medidas de tres ángulos, por ejemplo, 80°, 60° y 40°, ¿puede construir con ellos un triángulo? ¿Un solo triángulo o más de uno?

4. ¿Cuántos triángulos hay en la figura?



Mueva sólo 3 palitos de la figura y consiga 8 triángulos:



2.2. Clasificación de los triángulos

Disponemos de dos criterios para clasificar los triángulos:
a) ***Según las relaciones entre los lados***. Tenemos tres casos:

Nombre del triángulo	Relaciones entre los lados
Equilátero	***Los tres lados congruentes***
Isósceles	***Dos lados congruentes***
Escaleno	***Ningún par de lados congruentes***

5. Veamos estas dos afirmaciones: "Todo triángulo isósceles es equilátero" y "Todo triángulo equilátero es isósceles" ¿Alguna de ellas es verdadera? ¿O no lo es ninguna?

Construya con regla y compás un triángulo de cada uno de los tres tipos descritos.

b) Según la naturaleza de los ángulos. Tenemos también tres casos:

Nombre del triángulo	Naturaleza de los ángulos
Acutángulo	***Los tres ángulos agudos***
Rectángulo	***Un ángulo recto***
Obtusángulo	***Un ángulo obtuso***

En un ***triángulo rectángulo***, los dos lados que forman el ángulo recto se denominan ***catetos*** (kathetos [descendentes]); y el lado opuesto al ángulo recto, ***hipotenusa*** (hipotenusa = hypo [debajo] + teino [tender] = línea que se extiende por debajo de los catetos que descienden).

Si a usted le preguntan cómo se clasifican los triángulos según sus vértices, ríase y trate de inventar una respuesta que sea lo más ingeniosa posible... Y ahora, en serio, vamos a plantearnos y resolver un ejercicio interesante, derivado de considerar simultáneamente ambos criterios de clasificación para cualquier triángulo.

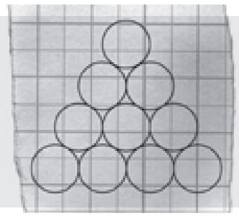
En cada una de las casillas de la tabla siguiente, trate de dibujar, ***si es posible***, un triángulo que responda a la vez a los dos criterios señalados en la cabecera de la columna y a la izquierda de la fila en la que se encuentra cada casilla:

Un triángulo que sea, a la vez:	acutángulo	rectángulo	obtusángulo
equilátero			
isósceles			
escaleno			

¿Le ha quedado alguna casilla en blanco? ¿Cuáles y por qué?

6. ¿Existe algún triángulo que tenga un solo ángulo agudo? ¿Y con dos ángulos agudos? ¿Con más de un ángulo recto? ¿Y con más de un ángulo obtuso?

7. Se colocan 10 monedas iguales siguiendo una formación de triángulo equilátero, tal como se indica en la figura. ¿Cuál es el número mínimo de monedas que hay que retirar, de tal modo que con los centros de las monedas que queden, no pueda construirse ningún triángulo equilátero, de ningún tamaño? (Gardner, 1986).



8. En un triángulo, los lados opuestos a ángulos congruentes, son congruentes a su vez; y viceversa. Y también, dentro de un mismo triángulo, a ángulos mayores se oponen lados mayores; y viceversa. ¿Cuántos ángulos congruentes posee un triángulo isósceles? ¿Y un triángulo equilátero?

9. Un triángulo, cuyos lados tienen medidas enteras, tiene un perímetro de 8 cm. ¿Qué clase de triángulo es?

10. Ana recibe el encargo de construir todos los triángulos de medidas enteras que pueda, tales que su perímetro sea de 9 cm. Patricia recibe el mismo encargo, pero con triángulos cuyo perímetro mida 10 cm. ¿Cuál de las dos podrá construir más triángulos?

Con regla y compás, construya un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 6 y 8 cm. Y construya otro, sabiendo que un cateto mide 5 cm y la hipotenusa, 10 cm.

2.3. Elementos notables de un triángulo

Hasta ahora hemos hablado de los lados, vértices y ángulos de un triángulo, entendiendo por estos últimos los ángulos interiores del triángulo. Vamos a ampliar este conjunto de elementos con otros varios, vamos a construirlos y a estudiar sus propiedades [Si desea una visualización dinámica de cada uno de los casos que se van a estudiar, puede acudir a la red en la dirección http://www.walter-fendt.de/m11s/index.html y llegar a las secciones “Rectas y circunferencias notables de un triángulo” y “Centro de masa de un triángulo”].

a) Mediatrices de un triángulo. Son las ***mediatrices de los tres lados del triángulo***. Su construcción se hace siguiendo las pautas de las actividades 10.1. y 12.3. descritas en el Cuaderno anterior.

Al efectuar esa construcción se descubre una de las propiedades fundamentales de las mediatrices de un triángulo: que se ***cortan en un punto***, denominado ***circuncentro***.

Dibuje tres triángulos, uno acutángulo, otro rectángulo, y un tercero obtusángulo; obtenga en cada caso el circuncentro. ¿Puede llegar a una conclusión general acerca de la ubicación del circuncentro, a partir de la consideración de los tres tipos de triángulos?

¿Qué particularidad presenta el circuncentro? Por pertenecer a la mediatriz *m*, equidista de A y de B; por pertenecer a la mediatriz *n*, equidista de B y de C; y por pertenecer a la mediatriz *r*, equidista de C y de A. Es decir, ***el circuncentro equidista de los tres vértices*** [En el Cuaderno 15 volveremos a referirnos a ese punto y a la consecuencia práctica que se deriva para todo triángulo].

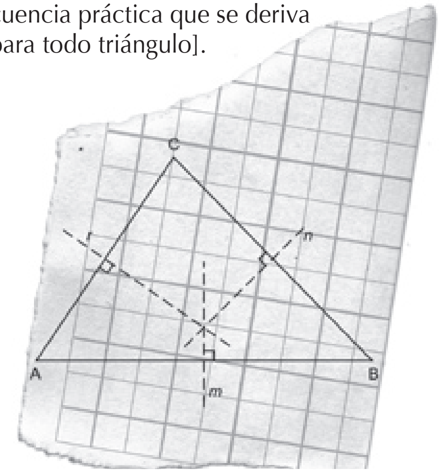


Fig. 5: Mediatrices de un triángulo y circuncentro

b) ***Bisectrices de un triángulo***. Son las ***bisectrices de los tres ángulos del triángulo***. Su construcción se hace siguiendo las pautas de la actividad 14.1. descrita en el Cuaderno anterior.

Al efectuar esa construcción se descubre una de las propiedades fundamentales de las bisectrices de un triángulo: que se ***cortan en un punto***, denominado ***incentro***.

Dibuje tres triángulos, uno acutángulo, otro rectángulo, y un tercero obtusángulo; obtenga en cada caso el incentro. ¿Puede llegar a una conclusión general acerca de la ubicación del incentro, a partir de la consideración de los tres tipos de triángulos?

¿Qué particularidad presenta el incentro? Por pertenecer a la bisectriz *m*, equidista de los lados AB y AC; por pertenecer a la bisectriz *n*, equidista de los lados AB y BC; y por pertenecer a la bisectriz *r*, equidista de los lados AC y BC. Es decir, ***el incentro equidista de los tres lados*** [En el Cuaderno 15 volveremos a referirnos a ese punto y a la consecuencia práctica que se deriva para todo triángulo].

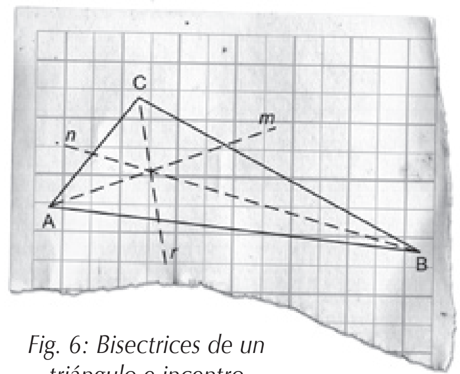


Fig. 6: Bisectrices de un triángulo e incentro

c) Medianas de un triángulo. Son los ***segmentos trazados desde cada vértice al punto medio del lado opuesto***. Su construcción se hace siguiendo las pautas de las actividades 10.2., 12.2. y 8.1. descritas en el Cuaderno anterior.

Al efectuar esa construcción se descubre una de las propiedades fundamentales de las medianas de un triángulo: que se ***cortan en un punto***, denominado ***baricentro***.

Dibuje tres triángulos, uno acutángulo, otro rectángulo, y un tercero obtusángulo; obtenga en cada caso el baricentro. ¿Puede llegar a una conclusión general acerca de la ubicación del baricentro, a partir de la consideración de los tres tipos de triángulos?

Trace cualquier triángulo en una hoja de cartulina. Recorte el triángulo y trate de mantenerlo en equilibrio sobre la punta de un dedo, sin que se caiga; es decir, trate de ubicar el punto de equilibrio del triángulo. Obtenga ahora el baricentro de ese triángulo y compárelo con el punto de equilibrio. ¿A qué conclusión llega?

Esta es la particularidad que presenta el ***baricentro***, que ***coincide con el centro de gravedad del triángulo***, como lo indica la raíz de la palabra (baros [peso, pesadez]).

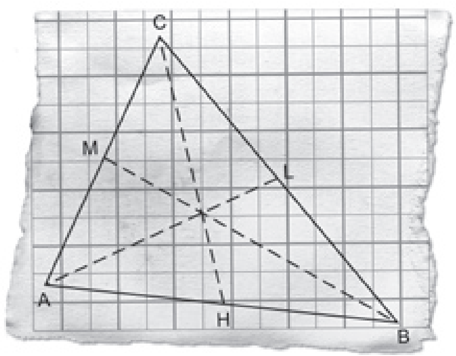


Fig. 7: Medianas de un triángulo y baricentro

d) Alturas de un triángulo. Son las ***perpendiculares trazadas desde cada vértice a la recta en que se asienta el lado opuesto***. Estas perpendiculares pueden tener su pie sobre el lado o sobre su prolongación. Su construcción se hace siguiendo las pautas de las actividades 10.5. y 12.4. descritas en el Cuaderno anterior.

Al efectuar esa construcción se descubre una de las propiedades fundamentales de las alturas de un triángulo: que ***se cortan en un punto***, denominado ***ortocentro***.

Dibuje tres triángulos, uno acutángulo, otro rectángulo, y un tercero obtusángulo; obtenga en cada caso el ortocentro. ¿Puede llegar a una conclusión general acerca de la ubicación del ortocentro, a partir de la consideración de los tres tipos de triángulos?

¿Qué particularidad presenta el ortocentro? En rigor, ninguna tan destacable como los tres puntos singulares recién vistos. Los griegos lo denominaron el centro "recto" del triángulo, como lo indica la raíz de la palabra (orthos [derecho, recto]), para recordar la incidencia de las alturas, que forman un ángulo recto con los lados correspondientes.

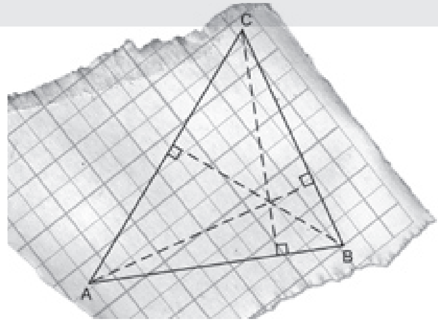


Fig. 8: Alturas de un triángulo y ortocentro

Podemos resumir los párrafos anteriores en esta tabla:

Intersección de las tres	Punto singular	Ubicado en	Particularidad del punto
Mediatrices	Circuncentro	Depende del tipo de triángulo	Equidista de los vértices
Bisectrices	Incentro	Región interna del triángulo	Equidista de los lados
Medianas	Baricentro	Región interna del triángulo	Centro de gravedad
Alturas	Ortocentro	Depende del tipo de triángulo	---

He aquí algunas preguntas. Trate de llegar por su cuenta a la respuesta.

a) ¿En qué tipo de triángulo ocurre que coinciden los cuatro puntos singulares?
b) ¿Qué ocurre con la altura, la mediana, la bisectriz y la mediatriz relativas a la "base" (el lado no congruente con ninguno de los otros dos) de un triángulo isósceles?

c) ¿En qué tipos de triángulos se observa que los cuatro puntos singulares se encuentran en la región interna del triángulo?

d) ¿Dónde se ubica el ortocentro de un triángulo rectángulo?

e) ¿Y el de un triángulo obtusángulo?

f) ¿Y dónde se ubica el circuncentro de un triángulo rectángulo?

g) ¿Y el de un triángulo obtusángulo?

h) Considere las medianas de la cartulina triangular que recortó para hallar su punto de equilibrio (centro de gravedad). En cada mediana, mida la distancia que hay desde el baricentro hacia el vértice, y la que hay desde el baricentro hasta el punto medio del lado opuesto. ¿Qué obtiene en los tres casos? ¿A qué conclusión puede llegar?

Y he aquí las respuestas:

a) En el triángulo equilátero.

b) Las cuatro se encuentran sobre la misma recta.

c) En los triángulos acutángulos.

d) En el vértice del ángulo recto.

e) Fuera del triángulo.

f) En el punto medio de la hipotenusa.

g) Fuera del triángulo.

h) En cada mediana, la distancia que hay del baricentro al vértice es el doble de la distancia que hay del baricentro al punto medio del lado opuesto.

e) Ángulos externos de un triángulo. Son los ángulos formados por uno de los lados de cada ángulo y por la prolongación del otro lado del mismo ángulo. En la figura aparecen marcados con los números 1, 2 y 3. Cada ángulo exterior es adyacente al ángulo interno correspondiente; observe que este par de ángulos son suplementarios.

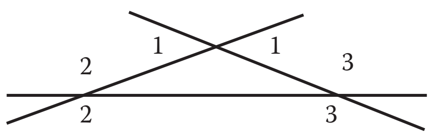


Fig. 9: Ángulos externos de un triángulo

2.4. La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

Este es un resultado fundamental y muy conocido: la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo ***es de 180º***. ¿Cómo se llega a este resultado? Veamos. Consideremos el Δ ABC, con sus ángulos internos <1, <2 y <3, así como la recta *r* sobre la que está ubicado el lado AB. Por el vértice C hacemos pasar una paralela *s* al lado AB. Observemos que sobre la recta *s* y con vértice en C se forman tres ángulos consecutivos, <4, <3 y <5, cuya unión forma un ángulo llano; es decir, la suma de las medidas de los tres es de 180º.

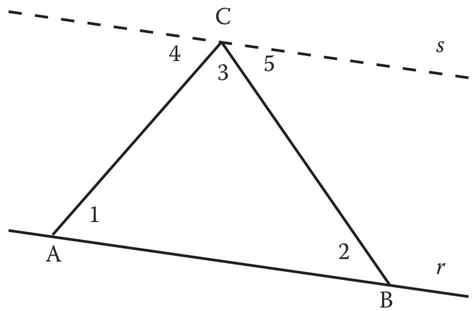
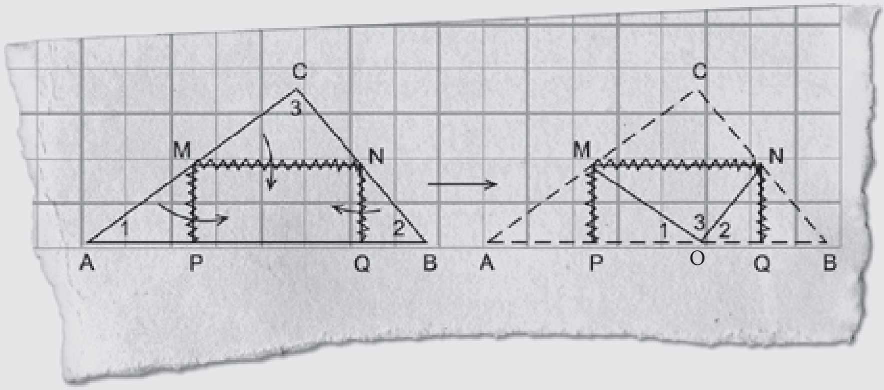


Fig. 10: Suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo

Vamos a fijarnos en la recta que contiene al lado BC. Esta recta es secante a las paralelas *r* y *s*, situación analizada en el Cuaderno anterior. Por su carácter de ángulos alternos internos, los ángulos <2 y <5 son congruentes. Análogamente, nos fijamos en la recta que contiene al lado AC. Esta recta también es secante a las paralelas *r* y *s*; y por su carácter de ángulos alternos internos, los ángulos <1 y <4 son congruentes.

Ahora bien, si la suma de las medidas de los ángulos <4, <3 y <5 es de 180º, también lo será la de los ángulos <1, <3 y <2, es decir, de los ángulos internos de cualquier triángulo [Si desea una visualización dinámica de este teorema, puede acudir a la red en la dirección http://www.walter-fendt.de/m11s/index.html y llegar a la sección "Suma de los ángulos de un triángulo"].

No resulta difícil construir ***un recurso material que ayuda a "visualizar"*** la anterior propiedad. Elaboramos un Δ ABC (preferiblemente escaleno) en cartulina o madera. Consideremos el lado más largo como la "base" AB. Marcamos los puntos medios M y N de los lados AC y BC, respectivamente, y colocamos una "bisagra" en el lugar del segmento MN. Desde los puntos M y N bajamos sendas perpendiculares a la base AB, hasta los pies P y Q, respectivamente, y colocamos sendas bisagras en el lugar de los segmentos MP y NQ.



Ahora, como se indica en la figura y haciendo juego en las tres bisagras, se giran las tres "pestañas" triangulares APM, BNQ y CMN hacia el centro, obteniéndose la segunda figura. En ella puede verse que los ángulos <1, <2 y <3 se acoplan para formar un ángulo llano con vértice compartido en O. Es decir, la suma de las medidas de los tres ángulos internos de cualquier triángulo es de 180º.

Esta propiedad es muy fecunda para llegar a otros resultados. El más evidente es que, conocidos los valores de dos de los tres ángulos de un triángulo, es muy fácil obtener el valor del tercero, restando de 180º la suma de las medidas de los dos ángulos conocidos. En otras palabras, ***cualquier ángulo es suplementario del ángulo suma de los otros dos.*** Veamos otros planteamientos:

¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo equilátero?

Por ser congruentes, miden lo mismo; por consiguiente su medida es: 180º : 3 = 60º. Por cierto, si dividimos un triángulo equilátero por la "mitad" (trace la figura) nos encontramos con dos triángulos rectángulos congruentes, cuyos ángulos miden 30º, 60º y 90º. Además, las hipotenusas miden el doble del cateto menor.

En un triángulo isósceles, el ángulo que no es congruente con ninguno de los otros dos ángulos, mide 70º. ¿Cuánto miden los dos ángulos restantes?

La suma de los dos ángulos congruentes es de 180º - 70º = 110º. Por consiguiente, cada uno de los dos ángulos congruentes medirá 110º : 2 = 55º.

Hay un poste en medio de una plaza. ¿Con qué ángulo deben incidir los rayos del sol sobre la plaza, para que el poste proyecte una sombra que tenga la misma longitud que el poste?

Haga el dibujo correspondiente. Como el poste es perpendicular al suelo, se forma un triángulo rectángulo. Los catetos son las representaciones del poste y de la línea de sombra en el suelo, respectivamente. Si ambos catetos miden lo mismo, se trata de un triángulo rectángulo isósceles. Por consiguiente, los ángulos agudos son congruentes y deben medir 45º cada uno. Este es el ángulo con el que deben incidir en ese momento los rayos del sol sobre la plaza.

En todo triángulo, la medida de un ángulo exterior es la suma de las medidas de los dos ángulos internos no adyacentes.

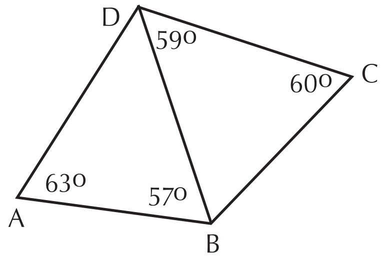
La razón es muy sencilla: el ángulo interno es suplementario tanto del ángulo externo adyacente como del ángulo suma de los otros dos. Por consiguiente... (concluya).

¿Cuánto da la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo?

Haga una figura para ayudarse. Llame <1, <2 y <3 a los ángulos interiores; y <4, <5 y <6 a los respectivos ángulos exteriores. Observe que <4 = 180º - <1; <5 = 180º - <2; <6 = 180º - <3. Por consiguiente: <4 + <5 + <6 = (180º - <1) + (180º - <2) + (180º

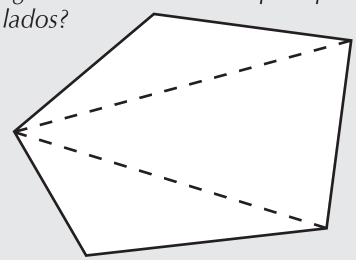
- <3) = 180º + 180º + 180º - (<1 + <2 + <3) = 180º + 180º + 180º - 180º = 180º + 180º = ***360º.***

Entre los cinco segmentos de la figura, ¿cuál es el mayor?



Antes establecimos que, dentro de un mismo triángulo, a ángulos mayores se oponen lados mayores; y viceversa. En el Δ ADB, el ángulo mayor es <A; por consiguiente, en este triángulo, el segmento mayor es BD. Ahora bien, en el Δ BCD, el ángulo mayor es <B, ya que su valor es 180º - (59º + 60º) = 61º. Por consiguiente, el lado mayor de este triángulo (y de los 5 segmentos) es DC.

¿Cuánto vale la suma de las medidas de los ángulos internos de cualquier polígono de n lados?



Dado un polígono cualquiera, como el de la figura, trazamos desde uno de los vértices todas las diagonales posibles. Así, la región poligonal interna queda dividida en triángulos. Los cinco ángulos internos iniciales, o han quedado intactos, o se han descompuesto en ángulos menores.

Lo que interesa observar es que se han formado 3 triángulos, y que la suma de los ángulos internos de estos tres triángulos equivale a la suma de los ángulos internos del polígono dado. Es decir, la suma de los ángulos internos de un pentágono es de 3 x 180º = 540º.

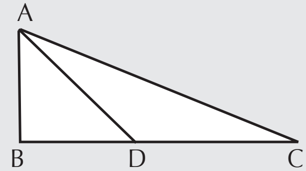
Ahora bien, si el polígono tiene 6 lados, se podrán trazar 3 diagonales desde cualquier vértice, y se formarán 4 triángulos internos, de donde la suma de los ángulos internos de un hexágono es de 4 x 180º = 720º. Ya se ve la regularidad: ***si el polígono tiene n lados, la suma de las medidas de sus ángulos internos será de (n – 2) x 180º***.

Las medidas de los ángulos internos de un triángulo están en razón 2 : 3 : 4. ¿Cuánto mide cada uno?

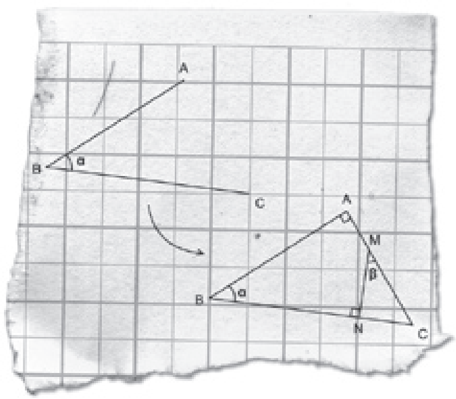
Tenemos que repartir los 180º en porciones que queden entre sí en las razones dadas. Si, por ejemplo, los ángulos midieran 2º, 3º y 4º, su suma sería de 9º. Para llegar a la suma de 180º debemos multiplicar por 20 (ya que 180º : 9º = 20) la medida de cada ángulo. Y así llegamos a 40º, 60º y 80º.

En el triángulo rectángulo ABD de la figura, los catetos AB y BD son congruentes. Además, AD es congruente con DC. ¿Cuánto mide < CAB?

Vamos por partes. El Δ ABD es isósceles; por consiguiente, sus dos ángulos agudos miden 45º cada uno (¿por qué?). El ángulo < ADC mide 135º (¿por qué?). El Δ ADC es isósceles (¿por qué?); por consiguiente, sus dos ángulos agudos miden 22,5º cada uno (¿por qué?). Finalmente, < CAB = < CAD + < DAB = 22,5º + 45º = 67,5º.



Si los lados de un ángulo α son, uno a uno, perpendiculares a los de un ángulo β, y si ambos ángulos son agudos, o ambos obtusos, entonces los dos ángulos son congruentes [Proposición establecida, sin demostración, en el Cuaderno anterior].

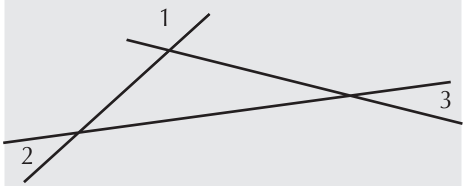


En la figura vemos, en un primer momento, el ángulo α (< ABC); y después, el ángulo β (< CMN), cuyos lados MC y MN son perpendiculares, respectivamente, a AB y BC. Ambos ángulos aparecen ahora integrados en la figura, en la que destacamos dos triángulos: Δ ABC y Δ CMN.

Ambos triángulos son rectángulos y, además, comparten el ángulo con vértice en C. Por consiguiente, los dos ángulos restantes de cada triángulo deben ser congruentes entre sí, ya que poseen el mismo ángulo suplementario: 90º + <C. Por consiguiente, < β = < α.

He aquí otros ejercicios propuestos:

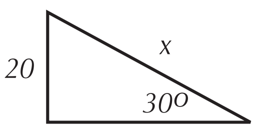
11. ¿Cuánto vale la suma de las medidas de los ángulos <1, <2 y <3 de la figura?



12. ¿Cuánto vale la suma de las medidas de los ángulos marcados en la figura?

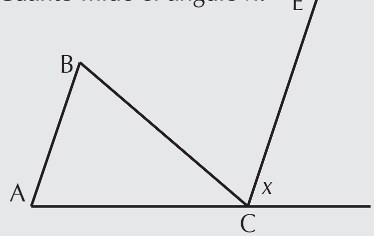
13. Las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo están en razón 5 : 6 : 7. ¿Cuánto miden los ángulos interiores del triángulo?

14. ¿Cuál es el valor de x en la figura?



15. En un Δ ABC, el ángulo opuesto por el vértice de <B mide 63º; y el ángulo exterior de <C mide 92º. ¿Cuánto mide el ángulo <A?

16. En el Δ ABC de la figura, los lados AC y BC son congruentes. El ángulo interno <C mide 50º. El segmento EC es paralelo a AB. ¿Cuánto mide el ángulo x?



2.5. La congruencia de triángulos

Hasta ahora habíamos comparado segmentos (según su longitud) y ángulos (según su amplitud). También es posible ***comparar figuras planas*** entre sí. En general, adoptamos dos criterios para hacer esta comparación: su forma y su tamaño, o magnitud de su región interior. La siguiente tabla refleja los posibles resultados de esta comparación:

Figuras	Forma	Tamaño
Congruentes	Igual	Igual
Semejantes	Igual	Diferente
Equivalentes	Diferente	Igual

De acuerdo con estos criterios, dos triángulos son congruentes si poseen igual forma y tamaño. Desde el punto de vista de sus elementos, la congruencia de dos triángulos significa que ***hay tres pares de lados correspondientes congruentes y tres pares de ángulos correspondientes congruentes***. Acotamos que un par de lados correspondientes significa que un lado es de uno de los triángulos, y el otro, del segundo triángulo; y análogamente para los ángulos.

En la figura se muestran dos situaciones de congruencia de triángulos; los vértices que se corresponden en la congruencia se indican con una ′ en cada caso.

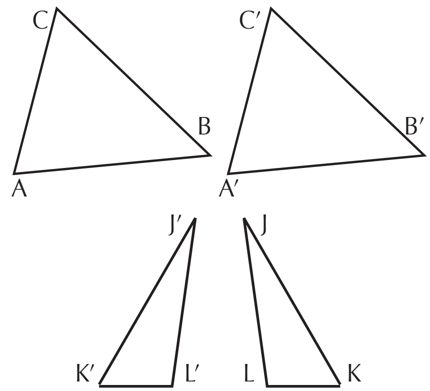


Fig. 11: Dos pares de triángulos congruentes

De modo que dos triángulos son congruentes si poseen seis pares de elementos correspondientes congruentes: tres pares de lados y tres de ángulos. Y para averiguar si dos triángulos dados lo son, habría que hacer esas seis verificaciones. La idea es economizar un poco esa indagación; es decir, podemos preguntarnos cuál es el mínimo de condiciones de congruencia que tenemos que exigir para asegurarnos la congruencia de los dos triángulos.

Ese es todo un trabajo de exploración, que empieza por plantearse el mínimo de condiciones posibles (un solo par de elementos correspondientes congruentes; luego, dos pares de elementos correspondientes congruentes, etc.) y preguntarse cada vez si esas condiciones son suficientes para que se pueda afirmar que los dos triángulos son congruentes. El resumen de esa exploración se presenta en la siguiente tabla:

Pares de elementos congruentes	Elementos correspondientes congruentes	¿Es condición suficiente?
1	1 par de lados	No
	1 par de ángulos	No
2	2 pares de lados	No
	2 pares de ángulos (equivale a 3 pares)	No
	1 par de lados + 1 par de ángulos	No
3	3 pares de lados	***Sí***
	2 pares de lados + el par de ángulos comprendidos entre ellos	***Sí***
	2 pares de lados + un par de ángulos (no comprendidos entre ellos)	No
	1 par de lados + los 2 pares de ángulos contiguos a ellos	***Sí***
	1 par de lados + 2 pares de ángulos no contiguos a ellos	No
	3 pares de ángulos	No

Ya no hace falta seguir explorando con más pares de elementos correspondientes congruentes. La conclusión es que para que dos triángulos sean congruentes, basta con que los dos triángulos presenten ***alguna*** de estas tres condiciones mínimas:

1. Los tres pares de lados congruentes.

2. Dos pares de lados congruentes y los correspondientes ángulos comprendidos entre ellos.

3. Un par de lados congruentes y los dos pares correspondientes de ángulos que tienen como vértices los extremos de esos lados.

Observe que éstas son también condiciones suficientes para poder construir un triángulo, con ciertas condiciones. Por ejemplo, en el caso 1, el mayor de los segmentos tiene que ser menor que la suma de los otros dos segmentos; en el caso 2, el ángulo debe medir menos que 180º; y en el caso 3, la suma de los dos ángulos debe ser menor que 180º. Tomando en cuenta estas restricciones, dé valores de segmentos y de ángulos para cada uno de los tres casos y construya los triángulos correspondientes.

En algunos casos particulares de triángulos, las anteriores condiciones pueden reducirse todavía más. Por ejemplo, para que sean congruentes:

1. Dos triángulos equiláteros, basta con que tengan un par de lados correspondientes congruentes.
2. Dos triángulos isósceles, basta con que lo sean las "bases" respectivas y los ángulos opuestos a las mismas.
3. Dos triángulos rectángulos, basta con que lo sean los dos pares de catetos correspondientes; o un par de catetos correspondientes y las hipotenusas.

Siempre es útil conocer los criterios para poder determinar si dos triángulos son congruentes, más allá de la simple impresión visual. Pero, además, ***determinar la congruencia de dos triángulos es una vía para poder establecer la congruencia, en particular, de algunos elementos correspondientes de cada triángulo.***

Por ejemplo, si quiero demostrar que tal lado (o ángulo) de un triángulo es congruente con otro de otro triángulo, la vía puede ser indirecta: demuestro que ambos triángulos son congruentes, y después deduzco que, en particular, lo son los dos lados (o ángulos) que me interesan. Vamos a utilizar esta vía para demostrar algunas proposiciones que establecimos en el Cuaderno anterior.

a) Validar la construcción de la bisectriz de un ángulo. Es decir, vamos a demostrar que la semirrecta construida en la actividad *14.1.* del Cuaderno anterior es, efectivamente, la bisectriz del ángulo dado.

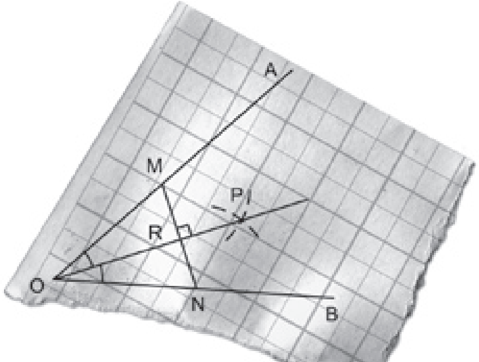


Fig. 12: Validación de la construcción de la bisectriz

Recordemos que, por construcción, OM = ON y que OP es la mediatriz del segmento MN. Estamos designando con R el punto medio del segmento MN; es decir, RM = RN. Consideremos los triángulos Δ ORM y Δ ORN; vemos que hay dos pares de lados correspondientes congruentes: OM = ON, RM = RN, y que OR es común en ambos triángulos. Por consiguiente, ambos triángulos son congruentes por tener los tres pares de lados congruentes. De aquí se sigue que los pares de ángulos correspondientes lo son también; y, en particular, < MOR = < RON. Conclusión: la semirrecta OP divide al ángulo < AOB en dos partes congruentes, MOR y RON; es decir, OP es la bisectriz de ese ángulo.

b) Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.

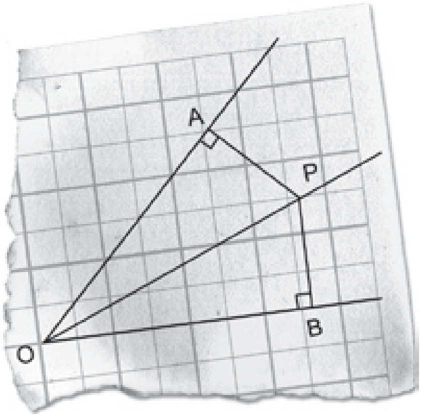


Fig. 13: Un punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo

En la figura, OP es la bisectriz del ángulo < AOB, donde P es un punto cualquiera de la bisectriz, y A y B los pies de las perpendiculares trazadas desde P a los dos lados del ángulo. Queremos demostrar que P equidista de esos dos lados, es decir, que AP y BP son iguales. Para ello, consideramos los triángulos Δ AOP y Δ BOP. Los ángulos < AOP y < BOP son congruentes, por ser OP la bisectriz de < AOB. Los ángulos en A y en B son congruentes, por ser ambos rectos. Y también lo son los ángulos < OPA y < OPB (¿por qué?). Además, ambos triángulos comparten el lado OP. Por consiguiente, ambos triángulos son congruentes por tener un par de lados congruentes y los dos pares correspondientes de ángulos que tienen como vértices los extremos de esos lados. De aquí se sigue que también lo son los lados AP y BP. Es decir, P equidista de A y de B, lo que significa que equidista de los lados del ángulo < AOB.

2.6. La semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si poseen igual forma y diferente tamaño. Desde el punto de vista de sus elementos, la semejanza de dos triángulos significa que los tres pares de ángulos correspondientes son congruentes y que ***los tres pares de lados correspondientes son proporcionales***. Refiriéndonos a los dos triángulos semejantes de la figura, expresamos (utilizamos el símbolo ~ para indicar la semejanza de dos triángulos):

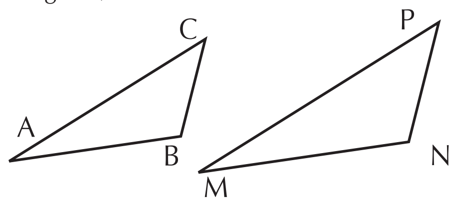


Fig. 14: Triángulos semejantes

$\Delta\, ABC \sim \Delta\, MNP$ equivale a: $< A = < M$,

$< B = < N$, $\; < C = < P$ y $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{BC}{NP} = \dfrac{AC}{MP}$

Obsérvese que si la razón de proporcionalidad entre los pares de lados correspondientes es igual a 1, los dos triángulos resultan ser congruentes. En realidad, la congruencia de triángulos es un caso particular de la semejanza de triángulos.

Al igual que en el caso de la congruencia, podemos establecer condiciones mínimas para asegurar que dos triángulos sean semejantes. Una indagación similar a la anterior nos lleva a concluir que basta con que los dos triángulos ***presenten*** alguna de estas tres condiciones:

1. Dos pares de ángulos correspondientes congruentes.

2. Un par de ángulos correspondientes congruentes, y proporcionales los dos pares correspondientes de lados que forman esos ángulos.

3. Los tres pares de lados proporcionales.

En algunos casos particulares de triángulos, las anteriores condiciones pueden reducirse todavía más. Por ejemplo, para que sean semejantes:

1. Dos triángulos equiláteros, no hace falta ninguna condición.
2. Dos triángulos isósceles, basta con que sean congruentes los ángulos opuestos a las respectivas "bases".
3. Dos triángulos rectángulos, basta con que sean proporcionales los dos pares de catetos correspondientes; o un par de catetos correspondientes y las hipotenusas; o que un par de ángulos agudos correspondientes sean congruentes.

Siempre es útil conocer los criterios para poder ***determinar si dos triángulos son semejantes, más allá de la simple impresión visual. Pero, además, determinar la semejanza de dos triángulos es una vía para poder establecer la congruencia de sus ángulos correspondientes, o la proporcionalidad de los segmentos correspondientes que forman sus lados***. Vamos a utilizar esta vía para demostrar algunas proposiciones.

a) El teorema de Tales

En la figura hemos trazado ***tres rectas paralelas*** *r, s* y *t* que son ***cortadas por las secantes*** *l* y *m*. Estos cortes determinan los segmentos AB, BC y AC en *l* y los segmentos DE, EF y DF en *m*. El teorema conocido como de Tales de Mileto (entre lo siglos VII y VI a. C.) asegura que en estas circunstancias, ***los segmentos determinados sobre las secantes son proporcionales; es decir***: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

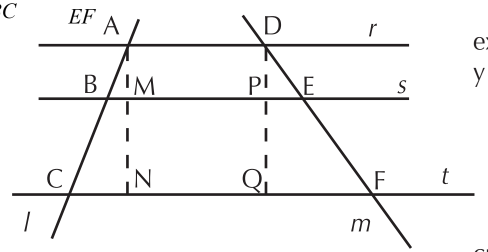


Fig. 15: Teorema de Tales: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Para llegar a demostrarlo hemos trazado sendas perpendiculares *a r, s* y *t* por los puntos A y D, respectivamente. De esta forma hemos construido los triángulos rectángulos Δ ABM, Δ ACN, Δ DEP y Δ DFQ. Si comparamos los dos primeros, observamos que los ángulos < ABM y < ACN son congruentes por correspondientes; y que el ángulo de vértice en A es común para ambos triángulos. Por consiguiente, Δ ABM ~ Δ ACN. De donde se sigue: $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN}$.

Mediante unas consideraciones análogas para Δ DEP y Δ DFQ, llegamos a: $\frac{DE}{DF} = \frac{DP}{DQ}$. Ahora bien, AM = DP y AN = DQ, ya que las distancias entre paralelas son constantes en cualquier punto. Así, podemos llegar a la siguiente relación proporcional: $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} = \frac{DP}{DQ} = \frac{DE}{DF}$. Es decir, $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$. Utilizamos ahora una de las propiedades de las proporciones para establecer: $\frac{AB}{AC - AB} = \frac{DE}{DF - DE}$. De donde llegamos a: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$. Este resultado puede extenderse al caso de más rectas paralelas y secantes.

b) Segmento que une los puntos medios de dos lados

En la figura se nos presenta un triángulo cualquiera, Δ ABC. Sobre los lados AC y AB hemos marcado sus puntos medios M y N, respectivamente. Formamos el segmento MN. Vamos a establecer que este ***segmento MN es paralelo al lado BC*** y que ***su longitud es la mitad de la de BC.***

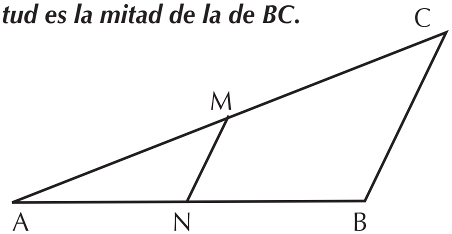


Fig. 16: Segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo

Para ello observamos los dos triángulos Δ ABC y Δ ANM. Por ser M y N los puntos medios de sus lados podemos establecer que $\frac{AM}{AC} = \frac{1}{2}$ y que $\frac{AN}{AB} = \frac{1}{2}$; es decir:

$\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$. Además, el ángulo de vértice A es común y es el ángulo comprendido entre los dos pares de lados proporcionales. Por consiguiente y de acuerdo a uno de los criterios establecidos con anterioridad, llegamos a la semejanza: Δ ABC ~ Δ ANM.

Esa semejanza implica la congruencia de los ángulos correspondientes; es decir, < AMN = < ACB y < ANM = < ABC. De este par de congruencias se deriva que MN es paralelo a CB, según se estableció en el Cuaderno anterior. Por otro lado, la razón de proporcionalidad entre los pares de lados correspondientes es siempre la misma, de donde se deduce que $\frac{MN}{CB} = \frac{1}{2}$; es decir, MN mide la mitad de la longitud de CB.

c) Cómo dividir un segmento en n partes congruentes

Por ejemplo, si queremos dividir un segmento dado AB en 7 partes congruentes, construimos un segundo segmento de cualquier longitud, y sobre él y a partir de uno de sus extremos marcamos 7 puntos equidistantes (ver actividad 8.5. en el Cuaderno anterior), a una distancia arbitraria pero constante, hasta llegar al último punto que denominaremos C.

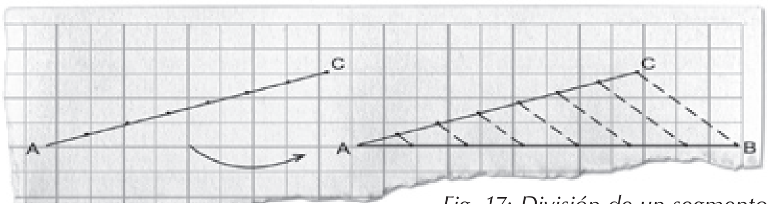


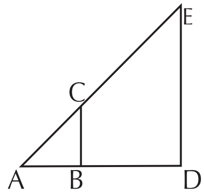
Fig. 17: División de un segmento en n partes

Ahora trasladamos este segundo segmento hacia AB, de modo que los puntos iniciales coincidan en A. Se traza el segmento BC y, a continuación, las paralelas a BC desde cada uno de los seis puntos marcados sobre el segmento AC. Los puntos en que estas paralelas cortan a AB, junto con B, son los puntos de división del segmento AB en 7 partes congruentes. Como se aprecia fácilmente, este procedimiento puede extenderse a cualquier otro número de partes congruentes en que quiera dividirse un segmento.

d) Cómo averiguar la altura de un objeto desconocido... con la ayuda de su sombra

Si se desea conocer la altura de un objeto desconocido (un edificio, un monumento, un árbol, un poste...) podemos ayudarnos con otro objeto conocido (uno mismo), con la sombra que produce el sol, y con la semejanza de triángulos. Por ejemplo, si deseo saber la altura de un edificio y conozco mi estatura, mido la sombra que proyecto y la que arroja el edificio desde el pie del mismo. Con estos datos puedo componer una figura muy sencilla:

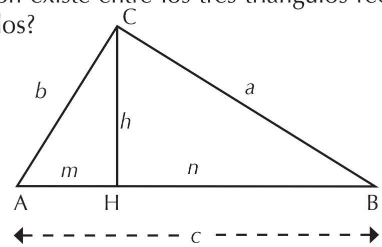
DE representa el edificio, CB es mi representación; y AB y AD, mi sombra y la del edificio, respectivamente. Como se ve, estamos en una situación de semejanza de triángulos (¿por qué?) y de proporcionalidad de lados. De donde se sigue: $\frac{DE}{CB} = \frac{AD}{AB}$.



Y despejando, $DE = \frac{CBxAD}{AB}$.

e) Un pequeño nido de triángulos rectángulos semejantes

Es el que se forma cuando en un triángulo rectángulo Δ ABC trazamos la altura CH correspondiente a la hipotenusa AB. Si observamos la figura, aparecen dos triángulos rectángulos más: Δ AHC y Δ CHB. ¿Qué relación existe entre los tres triángulos rectángulos?



Entre Δ ABC y Δ AHC observamos que ambos poseen un ángulo recto y que comparten <A; por consiguiente, al tener los tres pares de ángulos congruentes, se sigue: Δ ABC ~ Δ AHC. Lo mismo ocurre entre Δ ABC y Δ CHB: ambos poseen un ángulo recto y comparten <B. Luego Δ ABC ~ Δ CHB. En resumen, los tres triángulos rectángulos son semejantes. En breve utilizaremos este resultado.

a) Trace un segmento cualquiera y obtenga otro cuya longitud sea 5/3 de la del segmento dado. Utilice regla y compás para ello.

b) Destaque en su entorno algún objeto cuya cima sea inaccesible y calcule su altura.

Hemos visto que para demostrar la congruencia de pares de segmentos o de ángulos, una vía muy útil es la de considerar esos elementos como partes de sendos triángulos cuya congruencia o semejanza resulte posible demostrar. Podemos detallar este proceso así:

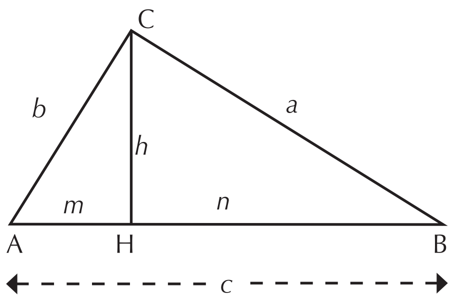
Si quiero demostrar	Busco demostrar
La congruencia de dos ángulos	La congruencia o la semejanza de dos triángulos en los que se hallen los dos ángulos
La congruencia de dos segmentos	La congruencia de dos triángulos en los que se hallen los dos segmentos
La proporcionalidad de dos segmentos	La semejanza de dos triángulos en los que se hallen los dos segmentos

2.7. Algunas relaciones entre las medidas de lados y segmentos de un triángulo

a) El teorema de Pitágoras

Este teorema, cuyo enunciado y aplicación práctica ya era conocida en las culturas babilónica y egipcia, y cuya demostración se atribuye a Pitágoras (s. VI a. C.), afirma que ***en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos***.

Podemos verificar la certeza del enunciado construyendo varios triángulos rectángulos, midiendo sus lados y efectuando las operaciones y la comparación indicadas. Pero si queremos adquirir un grado de certeza absoluto, necesitamos apoyarnos en una demostración. Para construirla, nos basamos en la misma figura que nos muestra el nido de triángulos rectángulos al que aludíamos antes:



Como veíamos, los tres triángulos son semejantes. Estas son las relaciones que se deducen entre los lados:

Δ ABC ~ Δ AHC => $\frac{AC}{AH} = \frac{CB}{CH} = \frac{AB}{AC}$; es decir: $\frac{b}{m} = \frac{a}{h} = \frac{c}{b}$

Δ ABC ~ Δ CHB => $\frac{AC}{CH} = \frac{CB}{HB} = \frac{AB}{CB}$; es decir $\frac{b}{h} = \frac{a}{n} = \frac{c}{a}$:

De la primera serie de proporciones destacamos: $\frac{b}{m} = \frac{c}{b}$ de donde, aplicando la propiedad fundamental de una proporción, deducimos $b^2 = c \times m$. Análogamente, de la segunda serie tomamos $\frac{a}{n} = \frac{c}{a}$ y llegamos a $a^2 = c \times n$. Si sumamos miembro a miembro estas dos igualdades llegamos a otra nueva igualdad: $b^2 + a^2 = c \times m + c \times n$. Pero en esta última expresión podemos aplicar la propiedad distributiva del producto respecto a la suma: $c \times m + c \times n = c \times (m + n) = c \times c = c^2$, ya que $m + n = c$. De donde:

$\mathbf{b^2 + a^2 = c^2}$.

Conocidos los valores de *a* y *b*, *c* se obtiene así: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Conocidos los valores de *a* (ó *b*) y *c*, *b* ó *a* se obtienen, respectivamente, así:

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$; $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

Si el triángulo rectángulo es, además, isósceles, la relación se reduce a: $c^2 = 2 \times a^2$; de donde $c = \sqrt{2xa^2}$

Para obtener los valores de las raíces cuadradas, utilice la calculadora.

Las ternas de números naturales que verifican la relación establecida en el teorema de Pitágoras reciben el nombre de ***ternas pitagóricas***; de ellas hablamos en el Cuaderno 6.

b) Otros resultados de interés

De las dos series de proporciones $\frac{b}{m}=\frac{a}{h}=\frac{c}{b}$ y $\frac{b}{h}=\frac{a}{n}=\frac{c}{a}$ se deducen otros resultados de interés:

1. Como acabamos de ver, $\boldsymbol{b^2 = c \times m}$ y $\boldsymbol{a^2 = c \times n}$. Si hacemos una lectura conjunta podemos establecer que ***en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de un cateto es igual a la longitud de la hipotenusa por la longitud de la proyección de ese cateto sobre la hipotenusa***. Por proyección de un cateto sobre la hipotenusa entendemos el segmento que se forma sobre ésta, entre los pies de las perpendiculares trazadas desde los extremos de los catetos (***m*** y ***n*** en cada caso).

2. Si tomamos las proporciones $\frac{b}{h}=\frac{a}{n}$ y $\frac{b}{m}=\frac{a}{h}$, deducimos, respectivamente: $h = \frac{bxn}{a}$ y $h = \frac{axm}{b}$. Al multiplicar miembro a miembro ambas igualdades obtenemos: $h \times h = \frac{bxn}{a} \times \frac{axm}{b} = \frac{bxnxaxm}{axb} = m \times n$. ***Es decir, $h^2 = m \times n$: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa, es igual al producto de las longitudes de las dos proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.***

3. Y si ahora tomamos cualquiera de estas dos proporciones: $\frac{a}{h}=\frac{c}{b}$ ó $\frac{b}{h}=\frac{c}{a}$, al despejar h se obtiene: $h = \frac{axb}{c}$: ***En un triángulo rectángulo, la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa, es igual al producto de las longitudes de los dos catetos, dividido entre la longitud de la hipotenusa.***

¿Para qué presentamos toda esta abundancia de relaciones? En primer lugar, para darnos cuenta de su riqueza, de cómo pueden descubrirse tantas relaciones entre los elementos de una figura tan particular como un triángulo rectángulo. Y, en segundo lugar, para facilitarnos la obtención del valor de elementos desconocidos a partir de unos pocos conocidos, por la vía de utilizar las fórmulas o relaciones anteriores.

17. Halle la medida de un cateto de un triángulo rectángulo, si el otro cateto mide 9 cm y la hipotenusa, 41 cm.

18. Halle la longitud de la altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo si los catetos miden 6 cm y 8 cm.

19. Halle la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo y de la altura correspondiente a la hipotenusa, si ésta mide 20 cm y las proyecciones de los catetos sobre ella, 7,2 cm y 12,8 cm.

Pero no podemos limitarnos al establecimiento de esas dos conclusiones. También podemos leer las relaciones "al revés", es decir, ***caracterizar a un triángulo rectángulo por esas relaciones de igualdad***.

Pero más aún, si llamamos:

c al lado mayor de un triángulo,
a y *b* a los otros dos lados,
h a la altura correspondiente al lado *c*,
n y *m* a las proyecciones de los lados *a* y *b* sobre *c*, respectivamente,
también podemos ***caracterizar a cualquier triángulo*** tomando en cuenta las relaciones descritas en la siguiente tabla:

Δ acutángulo	Δ rectángulo	Δ obtusángulo
$c^2 < a^2 + b^2$	$c^2 = a^2 + b^2$	$c^2 > a^2 + b^2$
$b^2 > c \times m$ y $a^2 > c \times n$	$b^2 = c \times m$ y $a^2 = c \times n$	$b^2 < c \times m$ y $a^2 < c \times n$
$h^2 > m \times n$	$h^2 = m \times n$	$h^2 < m \times n$
$h > \dfrac{axb}{c}$	$h = \dfrac{axb}{c}$	$h < \dfrac{axb}{c}$

Construya un triángulo de cada uno de los tres tipos indicados, haga las mediciones señaladas y verifique las relaciones anteriores en cada caso.

De acuerdo con los siguientes datos, determine en cada caso la naturaleza del triángulo (escríbalo en la última casilla). Si no es posible construir un triángulo que se ajuste a los datos, indique que no existe.

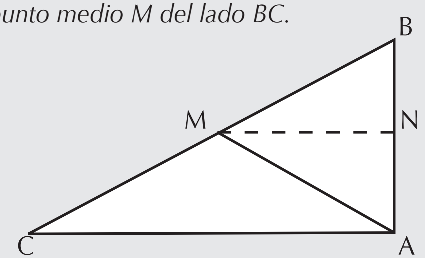
Casos / Datos	*a*	*b*	*c*	*h*	*m*	*n*	Δ
a)	7	8	8				
b)				3,2	1,8	6,2	
c)	12	5	13				
d)		5,4	10		3		
e)	4	3	9				
f)	7,3		12			4,5	
g)	5	6	9		7	2	

20. En un triángulo cuyos lados miden 3, 7 y 9 cm, ¿cuál es el valor que no puede exceder la altura correspondiente al lado mayor?

Si nos damos cuenta, las relaciones que se verifican en un triángulo rectángulo son sólo un caso particular (el de la igualdad entre los términos relacionados) entre todas las relaciones posibles. Lo importante es, además, percibir que ***podemos caracterizar la naturaleza de los ángulos de un triángulo a partir del conocimiento de las medidas de sus lados***. Estamos a las puertas de un capítulo de la matemática que se conoce como trigonometría (trigonon [triángulo] + metron [medida] = medidas de los elementos de un triángulo), que no vamos a franquear ahora.

Por otro lado, así como antes veíamos que para determinar la congruencia de pares de segmentos y de ángulos resultaba útil considerarlos como partes de sendos triángulos congruentes o semejantes, ahora también podemos observar que ***para determinar la longitud de un segmento resulta útil considerarlo como una parte de un triángulo rectángulo*** (que quizá haya que construir), con el fin de servirnos de todas las relaciones de igualdad que se dan en él. Veamos un caso práctico.

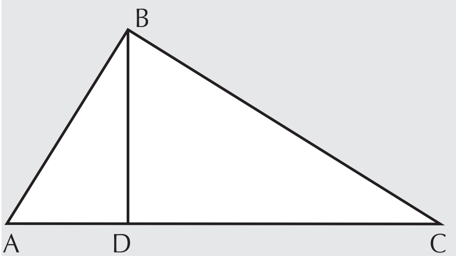
Dado el Δ ABC (rectángulo) de la figura, en el que CA = 8 cm y AB = 6 cm, hallar la longitud de la mediana que va desde A al punto medio M del lado BC.



Como puede observarse, AM no forma parte de ningún triángulo rectángulo, ya que la mediana no es perpendicular a BC. Pero si construimos el segmento MN, siendo N el punto medio de AB, la situación cambia: aparece el Δ AMN.

¿Cómo es este triángulo? MN es paralelo a CA y mide la mitad de CA, porque une los puntos medios de CB y AB. Por ser paralelo a CA, es perpendicular a AB. Por consiguiente, el Δ AMN es rectángulo. Además, MN mide 4 cm y NA, 3 cm. AM es la hipotenusa, cuyo valor se obtiene por la relación pitagórica: AM = $\sqrt{4^2 + 3^2}$ = $\sqrt{25}$ = 5 cm. Ahora, ¿puede demostrar que Δ AMB y Δ AMC son isósceles? ¿Podemos generalizar este último resultado a cualquier triángulo rectángulo?

Sea un triángulo rectángulo, uno de cuyos ángulos agudos mide 30º. Demostrar que las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa están en razón 1 : 3.



En la figura aparece Δ ABC, que es rectángulo; < ACB mide 30º; y BD es perpendicular a AC. Se trata de demostrar que

$\frac{AD}{DC} = \frac{1}{3}$. Observamos que el Δ ABC puede ser considerado como la "mitad" de un triángulo equilátero, de donde deducimos que AB = ½ (AC). Además, AB^2 = AC x AD (¿por qué?). Pero de la igualdad AB = ½ (AC) obtenemos también: AB^2 = ¼ (AC^2).

Si igualamos las dos expresiones equivalentes a AB^2 llegamos a: AC x AD = 1/4 (AC^2); y de aquí a: AD = 1/4 (AC). Pero si AD es la cuarta parte de la hipotenusa AC, esto significa que DC representa los 3/4 de dicha hipotenusa, de donde se deduce que AC es la tercera parte de DC; es decir: $\frac{AD}{DC} = \frac{1}{3}$.

2.8. Perímetro y área de un triángulo

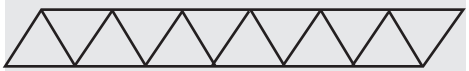
a) ***El perímetro de un triángulo*** se define como la ***suma de las medidas de los tres lados.***

21. Halle el perímetro de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 cm.

22. En un triángulo obtusángulo, los lados menores miden 5 y 10 cm. ¿Puede su perímetro ser menor que 26 cm?

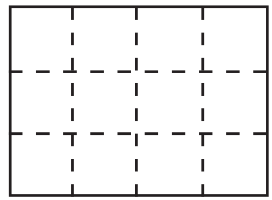
23. En un triángulo acutángulo, los lados menores miden 6 y 7 cm. ¿Puede su perímetro ser mayor que 23 cm?

24. Obtenga el perímetro externo de esta figura, formada por 12 triángulos equiláteros cuyos lados miden 1 cm, adosados unos a otros como se muestra. ¿Cuál será el perímetro externo de una figura similar, formada por 48 triángulos equiláteros del mismo tamaño?

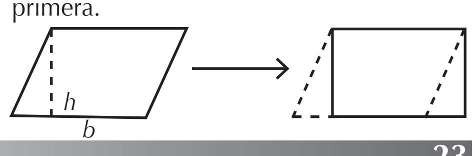


b) El área de un triángulo se define como la ***medida de la superficie de su región interior***. Para llegar a una expresión que relacione esta medida con la de los elementos de un triángulo, empezamos por considerar un cuadrado cuyo lado mide 1 unidad (u) de longitud (puede ser 1 cm, 1 m, etc.). Se dice que este ***cuadrado unitario*** tiene un área de 1 unidad cuadrada (1 u^2). Esta es la ***unidad para medir las áreas*** de cualquier superficie plana y, en particular, de cualquier polígono. Medir el área de un polígono consiste en averiguar cuántas veces su superficie contiene a un cuadrado unitario, en las unidades dadas.

Las figuras cuya área resulta más sencilla de medir son los rectángulos (cuadriláteros con los lados opuestos paralelos y ángulos internos rectos). Para calcular, por ejemplo, el área de un rectángulo cuyos lados miden 4 y 3 cm, nos imaginamos la figura "fraccionada" en 12 cuadrados unitarios de 1 cm de lado y 1 cm^2 de área:



El área del rectángulo es de 12 cm^2. E inferimos que si las dimensiones de sus lados son *a* y *b*, su área vendrá dada por *A* = *a x b*. Si ahora consideramos un paralelogramo (cuadrilátero con los lados opuestos paralelos y ángulos internos no necesariamente rectos) como el de la primera figura, observamos que siempre es posible "pasar" a un rectángulo como el de la segunda figura, cuya área es la misma que la de la primera.



El área del paralelogramo viene dada, pues, por $A = b \times h$, que describe el producto de su base por su altura. Observemos también que si se traza cualquiera de las dos diagonales de un paralelogramo, su región interior queda dividida en dos triángulos congruentes (los tres pares de lados correspondientes son congruentes).

Ahora bien, todo triángulo –sea acutángulo, rectángulo u obtusángulo- puede considerarse derivado de la bisección de un paralelogramo en la forma descrita (compruébelo). Por consiguiente, ***el área de un triángulo viene expresada por la mitad del producto de la longitud de un lado, por la longitud de la altura correspondiente a ese lado***. Abreviadamente, se dice que viene expresada por la mitad del producto de la longitud de su base por la longitud de su altura.

Y simbólicamente: A = 1/2 (b x h) ó $\frac{bxh}{2}$

En un triángulo rectángulo de catetos *a* y *b*, de hipotenusa *c*, y de altura *h* (correspondiente a la hipotenusa), el área también puede obtenerse dividiendo por 2 el producto de las longitudes de sus catetos.

Hay, pues, dos vías para calcular el área: $\frac{axb}{2}$ y $\frac{hxc}{2}$. Al igualar ambas expresiones tenemos: $a \times b = h \times c$. De aquí se sigue un resultado ya conocido: $h = \frac{axb}{c}$. Esta es una segunda vía para demostrar la misma relación.

En algunas oportunidades podemos no conocer la medida de la altura de un triángulo. Pero, a veces, es posible deducirla a partir de las medidas de otros lados, utilizando la relación pitagórica.

Tenemos dos triángulos isósceles, de medidas 5, 5 y 6 cm, y 5, 5 y 8 cm, respectivamente. ¿Cuál de los dos posee mayor área?

Haga las figuras correspondientes. En el primer triángulo, la base mide 6 cm. Al trazar la altura se forma un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 5 cm, y el otro cateto, 3 cm (mitad de la base); la altura mide: $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ cm. Por consiguiente, $A = ½$ (6 cm x 4 cm) = 12 cm^2.

Análogamente, en el segundo triángulo, la base mide 8 cm. Al trazar la altura se forma un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 5 cm, y el otro cateto, 4 cm (mitad de la base); la altura mide: $\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$ cm. Por consiguiente, $A = ½$ (8 cm x 3 cm) = 12 cm^2. Ambos triángulos tienen la misma área, a pesar de no tener el mismo perímetro.

c) Relaciones entre perímetros y áreas de triángulos.

25. ¿Es cierto que si un triángulo tiene un perímetro mayor que el de otro triángulo, el área del primero es mayor que la del segundo?

26. ¿Es cierto que si un triángulo tiene un área menor que la de otro triángulo, el perímetro del primero es menor que el del segundo?

27. De todos los triángulos que tienen un perímetro de 30 cm, ¿cuál es el que tiene la mayor área? ¿Se puede generalizar ese resultado para cualquier otro perímetro?

28. De todos los triángulos que tienen un área dada, ¿cuál es el que tiene siempre el menor perímetro?

Un triángulo rectángulo tiene un perímetro de 14 cm. Si la hipotenusa mide 6 cm, ¿cuánto mide el área del triángulo?

Si intentamos dibujar el triángulo nos encontramos con la dificultad de no saber la medida de los dos catetos. Si las conociéramos, el problema estaría resuelto. Sin embargo, es bueno observar que, en realidad, no necesitamos conocer las medidas exactas de ambos, sino su producto, ya que $A = 1/2$ (a x b).

De los datos se deducen dos relaciones: $a + b = 8$ cm [1]. Y por otro lado, $a^2 + b^2 = 6^2 = 36$ [2]. De [1] deducimos: $(a + b)^2 = 64$. Pero $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \times a \times b$ (como vimos en el Cuaderno 6), con lo que llegamos a: $a^2 + b^2 + 2 \times a \times b = 64$. Si utilizamos el resultado [2], la relación anterior nos queda como: $36 + 2 \times a \times b = 64$. Si restamos 36 en ambos miembros de esta igualdad, se deduce que $2 \times a \times b = 28$. Y que $a \times b = 14$. Y, finalmente, ½ $(a \times b) = 7$. El área del triángulo es 7 cm^2.

Existe una fórmula para ***calcular el área de un triángulo a partir del conocimiento de las medidas de sus lados***. Esta fórmula se atribuye a ***Herón de Alejandría*** (matemático e ingeniero griego del *s.* I d. C.) y establece que si los lados miden *a, b* y *c* unidades, y llamamos *s* al semiperímetro [$s = ½ (a + b + c)$], entonces el área viene dada por la expresión (en unidades cuadradas):

$$A = \sqrt{sx(s-a)x(s-b)x(s-c)}$$

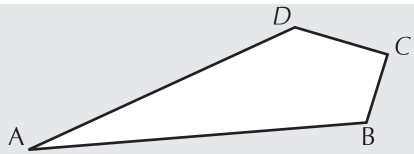
Así, por ejemplo, si los lados de un triángulo miden 5, 7 y 8 cm, respectivamente, su semiperímetro es: *s* =½ (5 + 7 + 8) = ½ x 20 = 10 cm; y su área viene dada por la raíz cuadrada de 10 x 5 x 3 x 2, es decir: A = $\sqrt{300}$ cm^2.

d) Área de cualquier polígono

Para obtener el área de cualquier polígono, una idea útil es la de considerarlo fraccionado internamente en triángulos, cuya unión cubra exactamente la región interior del polígono.

Calcular el área del cuadrilátero de la figura, en el que:

AD = 12 cm, AB = 13 cm, BC = 3 cm, CD = 4 cm; y BC es perpendicular a CD.

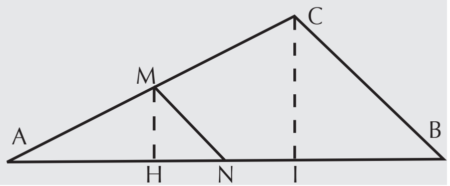


Podemos fraccionar la región interior mediante el trazado de la diagonal BD. Como el Δ DBC es rectángulo, la hipotenusa DB mide 5 cm, y su área es *A = ½ (a x b)* = ½ (3 cm x 4 cm) = 6 cm^2. Por otro lado, el Δ DBA también es rectángulo, ya que $12^2+5^2=13^2$; su área es A = ½ *(a x b)* = ½ (12 cm x 5 cm) = 30 cm^2. El área del cuadrilátero es 6 cm^2 + 30 cm^2 = 36 cm^2. Trate de obtener este resultado aplicando la fórmula de Herón de Alejandría a ambos triángulos y sumando posteriormente sus áreas respectivas.

2.9. Semejanza de triángulos: la razón entre las áreas

En el Δ ABC de la figura tenemos como datos: AB = 12, BC = 6, AC = 9. M y N son los puntos medios de AC y AB, respectivamente.

Como sabemos, Δ AMN ~ Δ ABC y la razón de proporcionalidad entre los lados correspondientes es ½. Obtener la razón entre las áreas de ambos triángulos.



En la figura aparecen las dos alturas, MH y CI. Ambas forman parte, respectivamente, de los Δ HNM y Δ IBC. Estos dos triángulos rectángulos son semejantes (¿por qué?) y como la razón $\frac{MN}{CB} = \frac{1}{2}$, entonces $\frac{MH}{CI} = \frac{1}{2}$. Es decir, MH = ½ (CI).

El área de Δ ANM es ½ (AN x MH). Y el área de Δ ABC es ½ (AB x CI). Ahora bien, AN = ½ (AB) y MH = ½ (CI). De donde, el área de Δ ANM es ½ (AN x MH) = ½ x ½ (AB) x ½ (CI) = ⅛ (AB x CI). Ahora calculamos la razón entre las áreas de ambos triángulos: área de Δ ANM / área de Δ ABC = [⅛ (AB x CI)] / [1/2 (AB x CI)] = ⅛ : ½ = ⅛ x 2 = ¼. Pero ¼ = $(½)^2$. Es decir, la razón entre las áreas de los dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón que existe entre sus lados correspondientes.

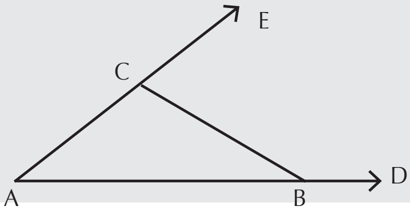
En términos generales podemos decir que ***si la razón entre los lados correspondientes de dos triángulos semejantes es r, la razón entre las áreas de ambos triángulos es r²; y viceversa***. Es fácil establecer este resultado general siguiendo una vía similar a la desarrollada en el problema anterior.

29. Tenemos dos triángulos equiláteros cuyos lados miden, respectivamente, 6 y 8 cm. ¿Cuáles son las razones entre: a) sus lados; b) entre sus medianas; y c) entre sus áreas?

30. Las áreas de dos triángulos semejantes son 16 y 36 cm^2. ¿Cuál es la razón entre los perímetros de ambos triángulos?

2.10 Y ahora, otros ejercicios “para la casa”...

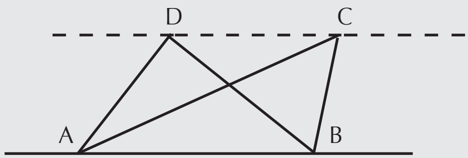
31. Dada la figura anexa, trace las bisectrices de los ángulos < DAE, < DBC y < ECB. Observe qué ocurre.



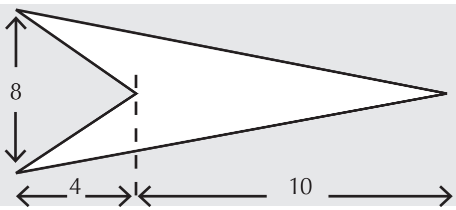
- Construya, con regla y compás, un triángulo isósceles, si le dan la base y su altura correspondiente.

- Construya, con regla y compás, un triángulo equilátero, dada su altura.

32. ¿Qué relación existe entre las áreas de los Δ ABC y Δ ABD de la figura, si las rectas AB y CD son paralelas?

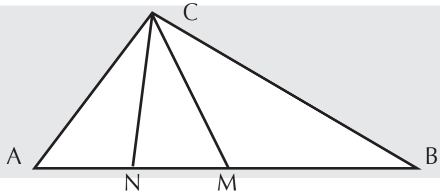


33. ¿Cuál es el área de la punta de flecha que aparece en la figura?



34. Los segmentos que unen los puntos medios de los lados de un triángulo miden 5,5 cm, 7 cm y 3,5 cm. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?

35. En la figura, el punto M es el punto medio del lado AB, y N es el punto medio del segmento AM. ¿Qué razón existe entre las áreas de los Δ ABC y Δ CNM?



Referencias Bibliográficas y electrónicas

- Fendt, W. (2003). Applets Java de Matemáticas. Disponible en: http://www.walter-fendt.de/m11s/index.html

- Gardner, M. (1986). Miscelánea matemática. Barcelona: Salvat.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. No; los ángulos internos no pueden ser todos congruentes **2**. 12 lados **3**. Sí. Infinitos triángulos **4**. 13 triángulos **5**. La 2ª es verdadera **6**. No. Sí. No. No **7.** 4 monedas **8**. 2; 3 **9**. Isósceles **10**. Ana: 3 triángulos **11**. 180º **12.** 360º **13.** 80º, 60º y 40º **14**. 40 **15**. 29º **16**. 65º **17.** 40 cm **18**. 4,8 cm **19**. 12 y 16 cm; 9,6 cm **20**. 7/3 cm **21**. 24 cm **22**. No **23**. No **24**. 14 cm; 50 cm **25**. No **26**. No **27**. El triángulo equilátero de 10 cm de lado. Sí se puede generalizar **28**. El triángulo equilátero **29**. a) y b) ¾; c) 9/16 **30**. ⅔ **31**. Se intersectan en un punto que equidista de las semirrectas AD y AE, y del segmento CB **32**. Son iguales **33**. 40 u^2 **34**. 32 cm **35**. ¼

Postdata: Las raíces cuadradas

El resultado establecido en el teorema de Pitágoras nos introduce en el tema de las raíces cuadradas de los números. Se observa con claridad que la operación de extraer la raíz cuadrada de un número es opuesta a la operación de elevar al cuadrado un número. Así, por ejemplo:

$$8 \underset{\text{extraer la raíz cuadrada}}{\overset{\text{elevar al cuadrado}}{\rightleftarrows}} 64$$

y escribimos: $8^2 = 64$ y $\sqrt{64} = 8$. Y también:

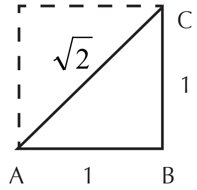
$$\sqrt{2} \underset{\text{extraer la raíz cuadrada}}{\overset{\text{elevar al cuadrado}}{\rightleftarrows}} 2$$

Nuestras calculadoras nos permiten extraer la raíz cuadrada de cualquier número, entero o decimal. Y, salvo en los casos en que tal raíz cuadrada es exacta (sea entera o decimal), el resultado tiene infinitas cifras decimales. Por ejemplo, $\sqrt{2}$ nos da como resultado 1,4142135...

¿Qué diferencia existe entre esta serie de números decimales y la que se obtiene, por ejemplo, al representar la fracción 8/7 en forma decimal (8/7 = 1,1428571...), que también nos aporta una serie infinita de cifras decimales? La diferencia está en que, en el caso de las fracciones, la parte decimal se presenta por lotes que se van repitiendo ininterrumpidamente: son los "períodos", de los que hablamos en el Cuaderno 9. Así, en el caso de 8/7, el período que se repite indefinidamente es 142857.

En cambio, ***estos períodos regulares no se presentan en el caso de la parte decimal de las raíces cuadradas no exactas. Esta es la diferencia fundamental que existe entre la naturaleza de las fracciones y la de las raíces cuadradas no exactas***. Estas últimas pertenecen a una clase de números que no pueden representarse como fracciones; o como razones, según la concepción de los griegos. Por ello, los pitagóricos los denominaron ***"irracionales" (no reducibles a una razón)*** [Véase en el Cuaderno 11 la referencia histórica correspondiente a $\sqrt{2}$].

Por lo que sabemos, $\sqrt{2}$ parece ser el primer ejemplo de número calificado como irracional por los griegos. ¿Cómo aparece en la historia de la matemática? Pues precisamente al intentar calcular la medida de la diagonal de un cuadrado cuyo lado medía 1 unidad. Y para este cálculo, los griegos utilizaron la relación establecida en el teorema de Pitágoras: AC = $\sqrt{AB^2 + BC^2}$ = $\sqrt{1+1}$ = $\sqrt{2}$.



Lo importante es ver que ***el teorema de Pitágoras nos permite dar un sentido geométrico a las raíces cuadradas de los números***. Así, $\sqrt{2}$ no sólo es un número cuyo valor es 1,4142135..., sino que también representa la medida de un segmento, en este caso, de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 1 unidad: Estamos viendo el objeto matemático $\sqrt{2}$ desde las perspectivas aritmética y geométrica, respectivamente.

Desde la perspectiva aritmética, para los griegos $\sqrt{2}$ resultaba "inconmensurable" con la unidad [Véase el Cuaderno 11 al respecto] y fastidioso de manejar, porque no podía representarse como una razón. Pero desde la perspectiva geométrica, $\sqrt{2}$ era un objeto limpio y elegante: la medida de un segmento muy fácil de trazar. Por esta razón, los griegos "metieron" la aritmética en la geometría y, para ellos, los números pasaron a ser medidas de segmentos.

Para representar, pues, las raíces cuadradas de los números como medidas de segmentos, sólo tenemos que construir triángulos rectángulos, colocando en los dos catetos, o en un cateto y en la hipotenusa, segmentos de medidas apropiadas a cada caso.

Por ejemplo, para obtener un segmento cuya medida sea $\sqrt{3}$, podemos construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa y uno de los catetos midan 2 y 1 unidad, respectivamente; la medida del otro cateto será $\sqrt{3}$. También podemos construir otro triángulo rectángulo cuyos catetos midan $\sqrt{2}$ (obtenido previamente) y 1 unidad, respectivamente; ahora la medida de la hipotenusa será $\sqrt{3}$.

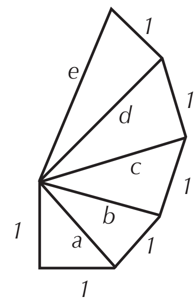
De más está decir que, de este modo, las raíces cuadradas de los números, así no sean exactas, pueden llevarse sobre la recta numérica, de un modo similar a los números naturales y a las fracciones; a cada una de ellas les corresponde también un punto sobre tal recta.

Obtenga un segmento cuya medida sea exactamente:

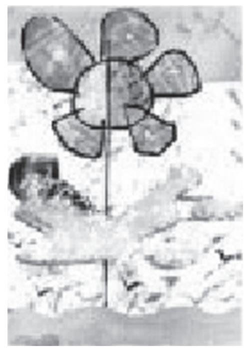
a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt{15}$; c) $2\sqrt{2}$; d) $\sqrt{17}$

Todos los triángulos de la figura son rectángulos. Halle las medidas de los segmentos *a, b, c, d, e*.

¿Qué números se van obteniendo progresivamente como medidas de los segmentos construidos de esa manera?



Índice



FE Y ALEGRIA