Serie

Desarrollo del pensamiento matemático

Nº 4

Sustracción

Martín Andonegui Zabala

FE Y ALEGRIA

UNESCO
IESALC

372.7
And.
Sustracción
Federación Internacional Fe y Alegría, 2005.
30 p.; 21,5 x 19 cm.
ISBN: 980-6418-70-0
Matemáticas, sustracción.

“Los alumnos llegan a las clases con un saber constituido como resultado de años de experiencias; son saberes que van a establecer una interlocución con otros saberes, a dialogar con ellos, y ninguna persona está dispuesta a desecharlos fácilmente. Cuando interactuamos con ellos lo que realmente estamos haciendo es poner en diálogo dos culturas, de ahí que la pretensión escolar de eliminar o modificar resulte, por decir lo menos, ingenua”.

Germán Mariño.
Dimensión Educativa (Colombia)

Equipo editorial

Antonio Pérez Esclarín, María Bethencourt

Dimensión: Desarrollo del pensamiento matemático
Serie: Sustracción, número 4
Autor: Martín Andonegui Zabala

Este libro se ha elaborado con el propósito de apoyar la práctica educativa de los cientos de educadores de Fe y Alegría. Su publicación se realizó en el marco del **Programa Internacional de Formación de Educadores Populares** desarrollado por la Federación Internacional Fe y Alegría desde el año 2001.

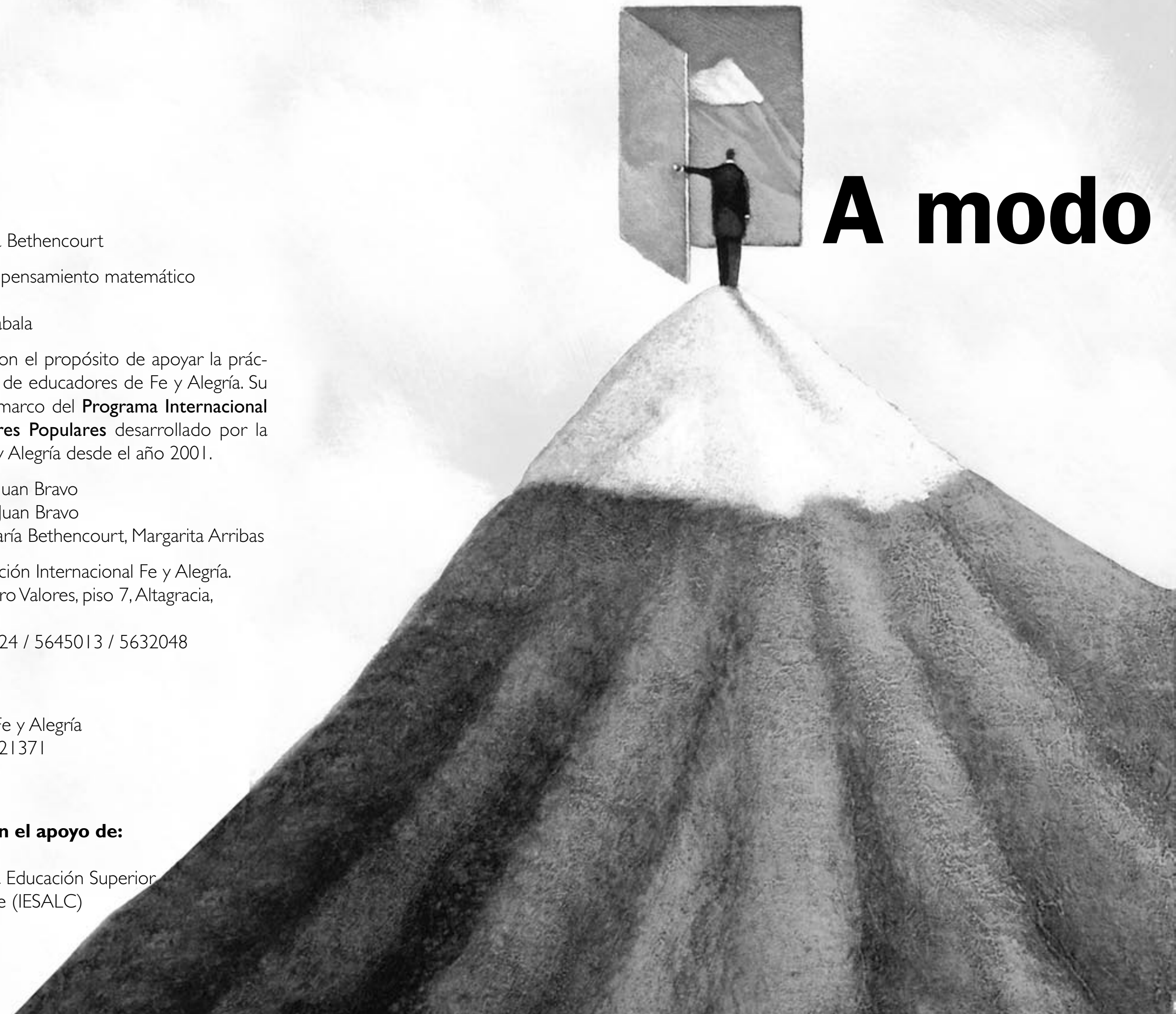
Diseño y diagramación: Juan Bravo
Portada e ilustraciones: Juan Bravo
Corrección de textos: María Bethencourt, Margarita Arribas

Edita y distribuye: Federación Internacional Fe y Alegría.
Esquina de Luneta, Edif. Centro Valores, piso 7, Altagracia,
Caracas 1010-A, Venezuela.
Teléfonos: (58) (212) 5645624 / 5645013 / 5632048
Fax (58) (212) 5646159
web: www.feyalegria.org

Depósito Legal: lf60320055121371

Caracas, julio 2005

Publicación realizada con el apoyo de:
Centro Magis
Instituto Internacional para la Educación Superior en América Latina y el Caribe (IESALC)



A modo

de introducción...

... y para desperezarnos un poco, ahí van unas cuestiones sencillas para entrar en materia y en calor. Tratemos de resolverlas antes de seguir adelante.

1. ¿En cuántas centésimas supera el número **135,05** al número **105,38**?

2. *En la siguiente resta, letras diferentes representan dígitos diferentes:*

$$\begin{array}{r} M\ O\ R\ A \\ -\ A\ M\ O\ R \\ \hline R\ O\ M\ A \end{array}$$

¿Cuál es el valor de cada letra?

Efectúe las dos restas A – B, siendo
A: 83 centenas, **305** décimas y **4** milésimas
B: 0,130402 unidades de mil
A: 36,107 decenas
B: 2 centenas, **706** décimas y **3** milésimas

3. *Sergio tiene **11** años y Raúl tiene **6**. ¿Dentro de cuántos años tendrán ambos la misma edad?*

4. Si de la suma de dos números se resta su diferencia, ¿qué se obtiene?

5. *¿Qué número de la siguiente sucesión está equivocado: **60, 52, 45, 38, 34, 30**?*

6. ¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor de los siguientes números: **0,5** / **0,505** / **0,55** / **0,5005**?

Bien, ya tenemos nuestras respuestas, que iremos contrastando con las indicaciones y ejercicios que plantearemos a lo largo de las líneas que siguen.

Y un segundo recordatorio:

La sugerencia que proponíamos en el Cuaderno Nº 1 y que siempre presidirá los demás Cuadernos: Vamos a estudiar matemática, pero no lo vamos a hacer como si fuéramos simplemente unos alumnos que posteriormente van a ser evaluados, y ya. No. Nosotros somos

(*) **Aviso a los navegantes:** Las respuestas a los ejercicios precedidos por un número en **negrita** aparecen al final del Cuaderno. Las respuestas a los ejercicios que no se encuentran precedidos por un número no las encontrarás en este Cuaderno. Dichas respuestas son para que las construyas y valides con tu grupo de trabajo.

docentes –docentes de matemática en su momento– y este rasgo debe caracterizar la forma de construir nuestro pensamiento matemático. ¿Qué significa esto?

• La presencia constante de la meta de nuestro estudio: alcanzar unos niveles de cono cimiento tecnológico y reflexivo, lo cual debe abrir ese estudio hacia la búsqueda de aplicaciones de lo aprendido, hacia el análisis de los sistemas que dan forma a nuestra vida y utilizan ese conocimiento matemático, y hacia criterios sociales y éticos para juzgarlos.

• Construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo enseñamos en el aula, además de reflexionar acerca de cómo nuestro conocer limita y condiciona nuestro trabajo docente. De esta forma, integrar nuestra práctica docente en nuestro estudio.

• Como complemento a lo anterior, construir el conocer de cada tópico matemático pensando en cómo lo podemos llevar al aula. Para ello, tomar conciencia del proceso que seguimos para su construcción, paso a paso, así como de los elementos–cognitivos, actitudinales, emocionales…– que se presenten en dicho proceso. Porque a partir de esta experiencia reflexiva como estudiantes, podremos entender y evaluar mejor el desempeño de nuestros alumnos –a su nivel– ante los mismos temas.

• En definitiva, entender que la matemática es la base de su didáctica: la forma en que se construye el conocimiento matemático es una fuente imprescindible a la hora de planificar y desarrollar su enseñanza.

Y ahora, vamos al tema de este Cuaderno, cuya estructura guarda similitud con la del Cuaderno anterior dedicado a la operación de adición.

1. ¿Qué es la sustracción (o resta) de números naturales?

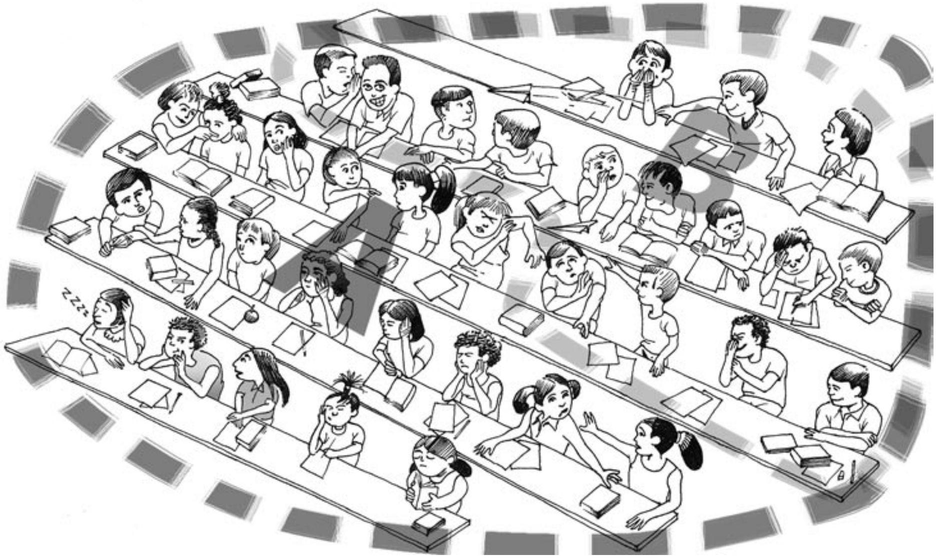
Al igual que en el caso de la adición, la primera respuesta que se nos ocurre es que, evidentemente, se trata de una operación aritmética según la cual, a cada par de números naturales cuyo primer componente sea mayor o igual que el segundo, se le hace corresponder otro número natural, su diferencia. Así, al par (**7** , **1**) se le hace corresponder el número **6** (7 – 1); al par (**13**, **13**), el número **0** (13 – 13); al par (**35** , **16**), el número **19** (35 – 16), etc.

Como puede verse, la sustracción no está definida para aquellos pares de números naturales cuyo segundo componente sea mayor que el primero. Es decir, no está definida para casos como (0 , 1), (3 , 9), (16 , 17), etc. Por esta razón se dice que la sustracción no es una operación "interna" en el conjunto de los números naturales, porque no funciona para cualquier par de estos números –cosa que sí ocurre con la adición–: al restar dos números naturales no siempre se puede obtener otro número natural.

Hay que esperar a llegar al conjunto de los números enteros –que son positivos y negativos– para que la sustracción se convierta en una operación interna en ese conjunto: la diferencia de dos números enteros es siempre un número entero.

La anterior –como en el caso de la suma– es una manera "formal" de decir las cosas, pero con esto tampoco nos aclaramos mucho, ya que debemos precisar cómo se resta, es decir, cómo se llega a 19 partiendo de 35 y de 16.

Para ello vamos a referirnos a dos conjuntos, A y B, y supondremos que B es subconjunto de A. Esto significa que todos los elementos de B son también elementos de A y que B no puede tener más elementos que A. También se dice que B está contenido en A. Un ejemplo sencillo puede ser el conjunto de niños (B) de un salón, en referencia al conjunto de todos los alumnos –niños y niñas– de



ese mismo salón (A): B es subconjunto de A.

Supongamos ahora que **A** cuenta con **35** elementos y **B** con **16** (recordemos que, en términos formales, se dice que el *cardinal* de A es 35 y que el de B es 16). A partir de los dos conjuntos podemos formar otro nuevo, que ya no será el conjunto unión –como en el caso de la adición–, sino el *conjunto complemento de B con respecto a A*.

¿Qué elementos componen este conjunto? Como su nombre lo indica, aquellos que están en A, pero no en B: los que le faltan a B para "llenar" A. En nuestro ejemplo anterior, sería el conjunto de las niñas del salón. Pues bien, la *diferencia* del cardinal de A menos el cardinal de B es *el cardinal del conjunto complemento de B con respecto a A*. En nuestro caso, 35 – 16 = 19.

Así que, para pensar en la diferencia de dos números, debemos imaginarnos que hay dos conjuntos; que uno de ellos posee tantos elementos como lo indica el mayor de los números; que el otro posee tantos elementos como lo indica el otro número a restar; que el segundo de los conjuntos es subconjunto del primero; que se construye el conjunto complemento del segundo con respecto al primero; y que se cuentan los elementos de este nuevo conjunto. El resultado final de este conteo es la diferencia de los dos números iniciales.

La diferencia de dos números naturales representa, pues, el cardinal del conjunto complemento de un subconjunto con respecto a otro conjunto que lo contiene, en el supuesto de que el menor de los dos números representa inicialmente el cardinal del subconjunto, y el mayor, el del conjunto que lo contiene.

En este punto cabe hacer una observación importante: la sustracción es la operación *inversa* de la adición. En efecto, volviendo a plantearnos B como un subconjunto de A, hemos visto que podemos construir el conjunto complemento de B con respecto a A. En este conjunto complemento de B no figura ningún elemento de B: solamente están los elementos que le faltan a B para "llenar" A. Por consiguiente, B y el complemento de B son conjuntos disjuntos (no comparten ningún elemento) y, además, su unión produce el conjunto A.

Por lo tanto, tenemos tres expresiones equivalentes:

- Cardinal del complemento de B con respecto a A = cardinal de A – cardinal de B.
- Cardinal de B + cardinal del complemento de B con respecto a A = cardinal de A.
- Cardinal de B = cardinal de A – cardinal del complemento de B con respecto a A.

Es decir, **19 = 35 – 16** equivale a **16 + 19 = 35** y a **35 – 19 = 16**

Insistimos: lo que va hasta aquí es la respuesta formal a la pregunta de qué es la sustracción. Pero, afortunadamente, esta no es la única respuesta. Porque la sustracción también puede ser vista como un *modelo de situaciones* de la vida diaria, o de situaciones lúdicas, o de otras áreas del saber. En este sentido, la sustracción se convierte en una herramienta que nos permite interpretar matemáticamente las situaciones que se presentan en nuestra vida.

¿Y cuáles, o de qué naturaleza son estas situaciones para las que la sustracción puede presentarse como modelo? Fundamentalmente, tres:

1. Situaciones de *quitar* de una cantidad dada y ver cuánto queda.

2. Situaciones de averiguar *cuánto falta* para llegar a determinada cantidad.

3. Situaciones de *comparar* dos cantidades, en el sentido de calcular cuánto tiene una de más o de menos con respecto a la otra.

Estas situaciones suelen venir caracterizadas –en la interpretación verbal que de ellas hace el sujeto- por verbos tales como *quitar, sacar, reducir, eliminar, quedar, sustraer, perder, pagar, regalar, faltar, exceder*… y otros similares. En estas circunstancias, la operación aritmética de la sustracción nos ayuda a llegar al resultado de calcular lo que queda después de quitar, lo que falta para llegar al total, en cuánto una cantidad excede a otra, etc.

En resumen, hay dos formas de considerar la sustracción: como un *modelo de situaciones de la vida diaria* y como un *objeto de estudio formal* dentro de la matemática (Vergnaud, 1991; Gadino, 1996).

Vamos a repetir también la observación que hacíamos en el caso de la adición: no hay contradicción entre ambas formas de considerar la sustracción, sino más bien complementariedad. Los tres tipos de situaciones nos remiten siempre a un subconjunto y a otro conjunto que lo contiene, con el objeto de hallar el cardinal del conjunto complemento del subconjunto dado.

Pero sí conviene resaltar que en el proceso de adquisición del concepto, de los procedimientos y de las destrezas propias de la resta, es preferible entrar por la vía del modelo de situaciones, y considerar el estudio formal –con su lenguaje específico- como una meta posterior.

Podemos precisar ahora los términos propios y formales para las cantidades que intervienen en la operación de sustracción o resta:

- ***Minuendo*** (del *lat*. minuere: disminuir): lo que debe ser disminuido.
- ***Sustraendo*** (de sub + *lat*. extrahere: quitar, sacar): lo que debe ser quitado.
- ***Diferencia***: el resultado de efectuar la sustracción.

Observemos que esta nomenclatura responde más directamente al primer tipo de situación antes indicado: cuando se trata de quitar de una cantidad dada y averiguar cuánto queda. Sin embargo, esta circunstancia no significa que deban minusvaluarse los otros dos tipos de situaciones, a los que también se aplican los términos anteriores.

Recordemos, finalmente, que la resta está definida en el conjunto de los números naturales sólo si la cantidad del sustraendo no es mayor (puede ser igual) que la del minuendo.

2. Restar sólo si hay un denominador común

Recordemos que, cada vez que en nuestro hablar expresamos un adjetivo numeral seguido de un sustantivo, estamos utilizando un binomio *numerador-denominador*. Así, en la locución "tres sillas", tres es el numerador y sillas el denominador. Análogamente al hablar de "cinco centenas", cinco es el numerador, y centenas el denominador.

Vuelven a repetirse las consideraciones hechas al hablar de la suma: para tratar los tres tipos de situaciones de los que es modelo la sustracción, resulta imprescindible que los elementos que se quitan, que faltan o se comparan, sean de la misma naturaleza. Es decir, en los términos que se introdujeron en el Cuaderno anterior, que los numeradores estén referidos al mismo denominador. Y si no es así, que puedan estarlo a un denominador común. Veamos un ejemplo al respecto.

La película de cine dura **una hora y cuarto**, y ya lleva proyectándose durante **media hora y 5 minutos**. ¿Cuánto falta para que acabe?

Como puede observarse, los denominadores son variados: **hora**, **cuarto**, **media hora**, **minutos**. Necesitamos un denominador común, que en este caso puede ser **minutos**. La adopción de este denominador modifica algunos numeradores: 1 hora y 1 cuarto se transforman, en conjunto, en **75 minutos**; a su vez, 1 media hora y 5 minutos se convierten en **35 minutos**. Con un minuendo de 75 minutos y un sustraendo de 35 minutos, ya podemos efectuar la resta: la diferencia es de **40 minutos**. Este es el tiempo que falta para que acabe la proyección de la película.

En conclusión –y de una forma análoga a la de la suma–:

En situaciones concretas, sólo se pueden restar cantidades referidas a un mismo denominador. En otras palabras, sólo se pueden restar numeradores referidos a un denominador común.

Pero aquí tampoco podemos quedarnos sólo con las situaciones concretas. La sustracción también es un objeto de estudio matemático y, como tal, abstracto. Necesitamos estudiar la sustracción en el terreno de lo abstracto. Y el primer paso hacia ese terreno consiste –como en el caso de la suma– en prescindir de los objetos o entidades que se restan, es decir, de los denominadores. Y así llegamos a las *expresiones simbólicas* de la sustracción. Por ejemplo, $9 - 4 = 5$, con sus símbolos numéricos (numeradores) 9 y 4, y sus signos de relación "menos" e "igual".

El uso adecuado de las expresiones simbólicas requiere dominar dos aspectos: el conceptual y el procedimental. El dominio del aspecto conceptual significa entender lo que está expresado ahí, en los símbolos numéricos y en los signos de relación. Por eso, quien empieza a construir sus conocimientos sobre la resta no puede entrar de una vez al terreno abstracto de lo simbólico; necesita experimentar antes en el terreno de las situaciones concretas –con numeradores y denominadores–. Sólo después puede aventurarse con los numeradores aislados de los denominadores, y con las expresiones simbólicas.

Y recordemos que si experimenta dificultades de comprensión en este terreno de lo simbólico, resulta inútil intentar resolverlas en el mismo terreno: hay que *regresar a lo concreto*, hay que agregar denominadores a los numeradores que se restan, pues sólo de esta manera se *dota de significado a lo simbólico*.

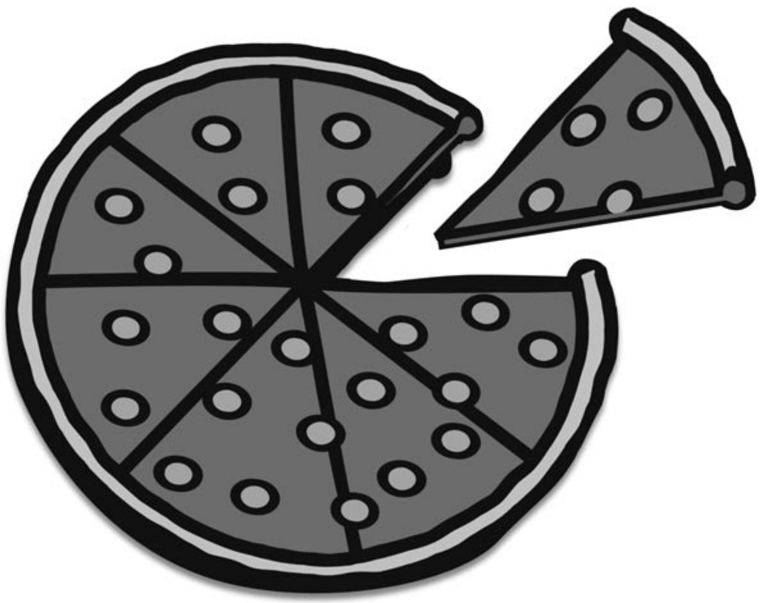
3. Restar en el sistema decimal de numeración

Decíamos más arriba que el uso adecuado de las expresiones simbólicas requiere dominar también el aspecto procedimental. Debemos hablar, pues, de los algoritmos de la resta, de los procedimientos para restar. Y para ello, vamos a darle paso al sistema decimal de numeración.

Lo primero que debemos recordar es que todas las unidades de los diversos órdenes –en virtud de la "democracia" que reina dentro del sistema decimal– tienen rango de "denominadores". Como decíamos antes, podemos hablar de 5 centenas, 13 décimas, etc. Por consiguiente, en principio sólo podemos restar directamente cantidades referidas a unidades del mismo orden –de igual denominador–. Así, 57 centésimas – 12 centésimas nos da como resultado 45 centésimas.

Afortunadamente, ya sabemos que todo número puede tener múltiples lecturas, al poder referirse a cualquiera de los órdenes de unidades del sistema decimal. Es decir, cualquier número puede adoptar un nuevo denominador, modificando adecuadamente el numerador dado. Así, 57 centésimas pueden convertirse en:

570 milésimas
5.700 diezmilésimas
570.000 millonésimas
0,57 unidades
0,057 decenas
5,7 décimas
etc.



De esta forma, siempre puede restarse cualquier par de números decimales –siempre que el sustraendo no sea mayor que el minuendo–, con tal de que se reduzca a un denominador común, el que se desee o el que más convenga. En esta tarea el cartel de posición se convierte en un aliado eficaz, sobre todo al comienzo del aprendizaje.

Tomemos, por ejemplo, uno de los ejercicios propuestos al comienzo del Cuaderno: Efectúe la resta A – B, siendo

A: 83 centenas, 305 décimas y 4 milésimas
B: 0,130402 unidades de mil

Llevemos estos números al cartel de posición y coloquémoslos en las dos primeras filas, reservando la tercera para colocar el resultado de la resta –resultado que, intencionalmente, se escribirá sin ninguna coma–:

Parte entera Orden y nombre de las unidades							Parte decimal Orden y nombre de las unidades					
6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
Millón	Centena de mil	Decena de mil	Unidad de mil	Centena	Decena	Unidad	Décima	Centésima	Milésima	Diez-milésima	Cien-milésima	Millo-nésima
			8	3	3	0	5	0	4			
				1	3	0	4	0	2			
			8	2	0	0	1	0	2			

El resultado admite diversas lecturas (diversos binomios numerador-denominador):

0,8200102 decenas de mil
8,200102 unidades de mil
820,0102 decenas
8.200,102 unidades
8.200.102 milésimas
etc.

4. El asunto del "pedir (o quitar) prestado"

Si en la suma se presenta el problema de la "llevada", aquí tenemos un problema análogo –aunque quizá un poco más complejo en la práctica–: el de "pedir (o quitar) prestado", es decir, cuando en la resta de dos dígitos correspondientes al mismo orden de unidades, el dígito del sustraendo es mayor que el del minuendo. En este caso, y puesto que el sustraendo no puede ser mayor que el minuendo, decimos que hay que "pedir prestada una unidad" a la de orden inmediatamente superior.

Aquí entra en juego el propio ser del sistema decimal, ya que su esencia consiste precisamente en que **1** unidad de un orden cualquiera se convierte en **10** unidades del orden inmediatamente inferior. Así, **1** decena equivale a **10** unidades, **1** milésima equivale a **10** diezmilésimas, **1** centena de mil equivale a **10** decenas de mil, etc.

Este principio, tan básico y tan sencillo en su formulación, tarda en ser asimilado y llevado a la práctica. Los errores de los niños –y de algunos adultos– al respecto son frecuentes y, generalmente, producto de un aprendizaje mecánico, privado de significado. Errores graves, por cuanto denotan que no se comprende el funcionamiento del sistema decimal.

Lo peor del caso es que habitualmente se intentan corregir sobre el propio esquema numérico escrito en que se propone la resta

(por ejemplo: $\begin{array}{r} 861 \\ \underline{-\ 395} \end{array}$)

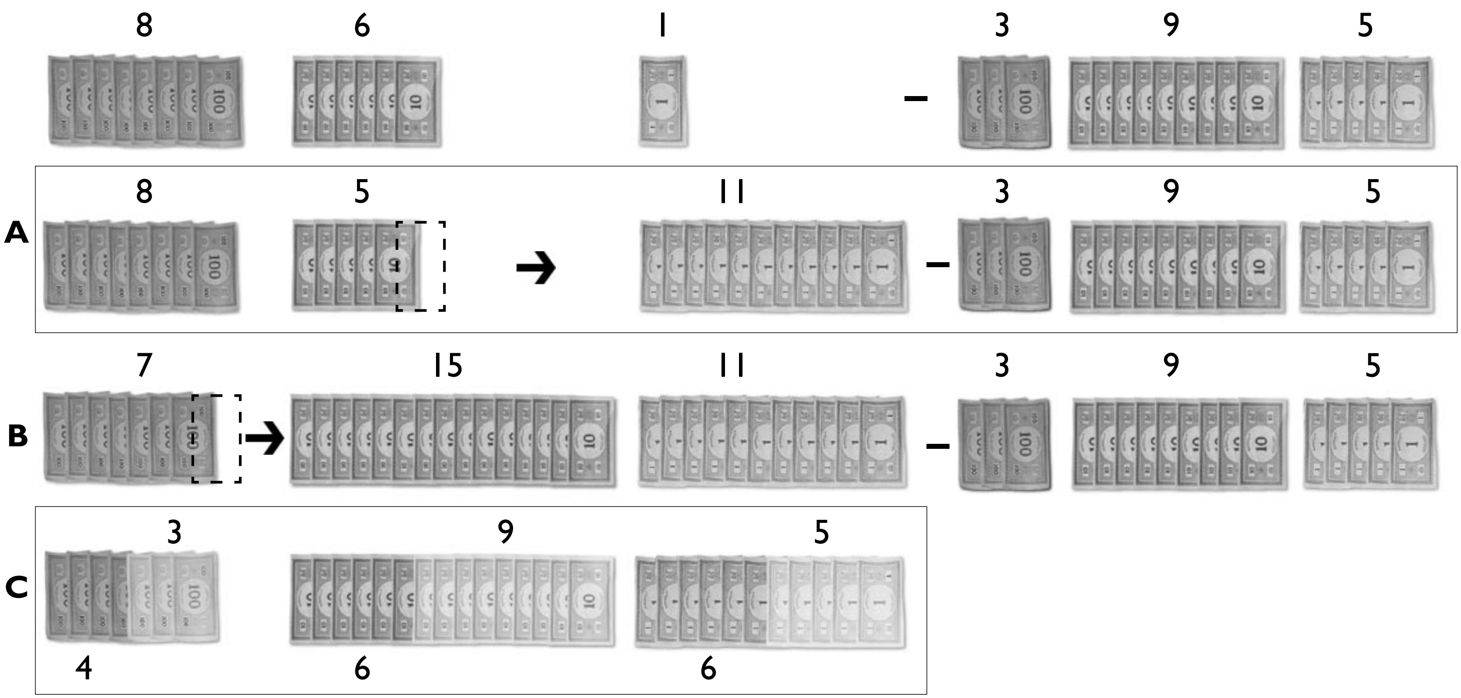
insistiendo en fijarse en las restas parciales en las que el dígito del sustraendo es mayor que el del minuendo, fijarse en que hay que quitar 1 unidad de la cifra que está a la izquierda y arrimarla como decena para la cifra que pide "auxilio", etc., sin percatarse de que los errores cometidos al utilizar los esquemas simbólicos –esquemas que son abstractos–, sólo pueden corregirse retornando al terreno de lo concreto, que es donde se puede alcanzar el significado de la resta.

¿Cuál puede ser este terreno concreto en el que se respete la esencia del sistema decimal? Puede ser el ya mencionado de los billetes de denominación decimal (1;10; 100; 1.000; 0,1; 0,01; etc.). Por ejemplo, en el caso de la resta anterior, restar **861 – 395** significa, en primer lugar, entender cada uno de los números: **861** es un número “complejo”, compuesto por 8 centenas, 6 decenas y 1 unidad; y análogamente, 395.

Restar ambos números significa que voy a tener inicialmente **8** billetes de **100**, **6** de **10**, y **1** de **1**. Después, me van a pedir **3** billetes de **100**, **9** de **10** y **5** de **1**. Empecemos por la derecha, es decir, por los billetes de 1. Evidentemente, no puedo desprenderme de 5 billetes de 1, porque sólo dispongo de 1. Comienza el proceso de “ir al banco” para cambiar billetes.

A) Llevo **uno** de los **6** billetes de **10** que tengo (me quedarán **5** de **10**), que me será devuelto como **10** billetes de **1**. De esta forma dispongo ahora de **11** billetes de **1** (**10** del banco más **1** que tenía); entrego los **5** solicitados y me quedan **6**.

B) Análogamente con los billetes de **10**, no me alcanza con los **5** que tengo para dar los **9** que me solicitan. Vuelvo al banco y cambio **uno** de los **8** billetes de **100** (me quedarán **7**), que me será devuelto como **10** billetes de **10**; ahora dispongo de **15** billetes de **10** (**10** del banco más **5** que tenía), de



los que entrego **9** para quedarme con **6**. Finalmente, de los **7** billetes de **100** que me quedan entrego los **3** solicitados, y me restan **4**.

C) Al final del proceso de cambios y entregas tengo: **4** billetes de **100**, **6** de **10** y **6** de **1**. La composición de estas partes me lleva al número que expresa la diferencia, **466**.

Todo este proceso puede simbolizarse en pasos progresivos (en **negrita**) de la siguiente forma (C, D y U representan, respectivamente, Centenas, Decenas y Unidades):

$$\begin{array}{rrr} C & D & U \\ 8 & 6 & 1 \\ -3 & 9 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} C & D & U \\ 8 & \mathbf{5} & \mathbf{11} \\ -3 & 9 & 5 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} C & D & U \\ \mathbf{7} & \mathbf{15} & 11 \\ -3 & 9 & 5 \\ \hline 4 & 6 & 6 \end{array}$$

Como puede observarse, la ejecución de la resta sólo es posible en el último de los pasos y, ya en él, puede realizarse en cualquier orden: primero las centenas, luego las unidades y finalmente las decenas, o como se prefiera. Evidentemente, con un poco de atención se puede llegar al último de los pasos de una sola vez.

Vamos a aplicar todo lo anterior a la resolución de otro de los ejercicios propuestos al comienzo del Cuaderno:

Efectúe la resta A – B, siendo
A: 36,107 decenas
B: 2 centenas, **706** décimas y **3** milésimas

La resta puede representarse así:

$$\begin{array}{rrrrrr} \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{U} & \mathbf{d} & \mathbf{c} & \mathbf{m} \\ 3 & \mathbf{6} & 1 & \mathbf{0} & 7 & \mathbf{0} \\ -2 & \mathbf{7} & 0 & \mathbf{6} & 0 & \mathbf{3} \\ \hline \end{array}$$

(en **negrita**, los pares de dígitos "en problemas")

Y transformarse de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rrrrrr} \mathbf{C} & \mathbf{D} & \mathbf{U} & \mathbf{d} & \mathbf{c} & \mathbf{m} \\ 2 & 16 & 0 & 10 & 6 & 10 \\ -2 & 7 & 0 & 6 & 0 & 3 \\ & 9 & 0 & 4 & 6 & 7 \\ \hline \end{array}$$

resultado que, como sabemos, puede expresarse con diversos numeradores y denominadores: **90,467 unidades**; **90.467 milésimas**; etc.

7. En los ejercicios que siguen, efectuaremos la resta A – B de los respectivos números A y B (entre paréntesis, el orden de unidades en que formularemos la respuesta):

a) A: 40 centenas y **18** décimas
B: 186 decenas y **30** centésimas
(unidades)

b) A: 0,7084 millones
B: 318 centenas y **7** unidades
(centenas)

c) A: 162,05 décimas
B: 9,807 unidades
(centésimas)

d) A: 21.000 centésimas
B: 14 decenas y **83** décimas
(decenas)

Lo que importa resaltar es que este recurso a lo concreto –billetes de denominación decimal–, y a los progresivos esquemas operativos simbólicos, debe preceder al ejercicio de la resta de números dispuestos en columna, tal como se propone habitualmente. Y debe quedar ahí, disponible, para dotar de significado a dicho ejercicio cada vez que el aprendiz presente dificultades o cometa errores en su realización.

5. El desarrollo de destrezas para restar

Todo lo expresado en los dos puntos anteriores hace referencia a la consideración de la sustracción en el ámbito del sistema decimal de numeración. Su aplicación más inmediata se ubica en los casos de resta escrita en los que el minuendo y el sustraendo se colocan verticalmente. Pero aquí no termina todo lo que se puede decir acerca de esta operación aritmética. Como en el caso de la suma, podemos explorar, por ejemplo, el terreno de la adquisición de destrezas –no sólo de reglas– para restar.

Aunque para ello no contamos con propiedades similares a las de la adición (conmutativa, asociativa y disociativa), sí podemos establecer un cuerpo de propiedades útiles para el desarrollo de destrezas en el manejo de la resta. Veamos esto con más detalle.

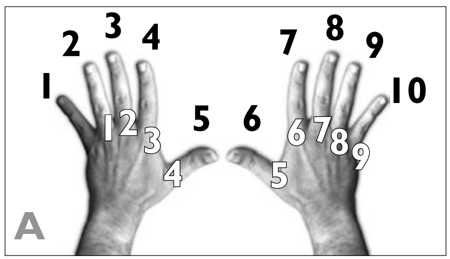
No podemos considerar la propiedad conmutativa en la sustracción ya que, efectivamente, 5 – 3 no es lo mismo que 3 – 5: en el primer caso, la diferencia es 2, mientras que en el segundo, la resta no puede realizarse dentro del conjunto de los números naturales.

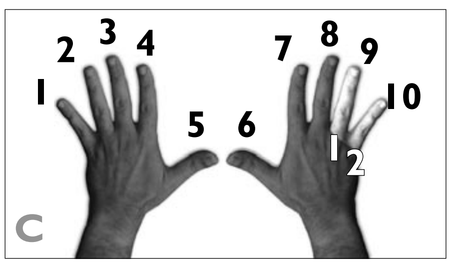
Si *a* y *b* representan dos números naturales, ¿puede ocurrir en algún caso que *a* – *b* sea igual a *b* – *a*? Sí, sólo cuando *a* y *b* sean el mismo número. ¿Cuántos de estos casos posibles hay? Infinitos, tantos como números naturales.

También es cierto que no podemos hablar de la propiedad asociativa en el caso de la operación de sustracción, y que el elemento neutro –el 0– sólo "funciona" por la derecha, es decir, que 5 – 0 = 5 (pero no se puede plantear 0 – 5). Sin embargo, hay otras propiedades de interés que pueden facilitarnos el desarrollo de destrezas para restar. Destrezas que, como veíamos en el caso de la adición, son la base del cálculo mental aplicado a las sustracciones.

Atención:

Todo lo que se va a decir ahora no es sólo para entenderlo. Es, sobre todo, para practicarlo. Pero no un par de veces, y ya. La ejercitación frecuente y abundante es requisito indispensable para desarrollar destrezas de cálculo mental. Y esto es muy importante, porque si no las poseemos no podremos construirlas con nuestros alumnos.





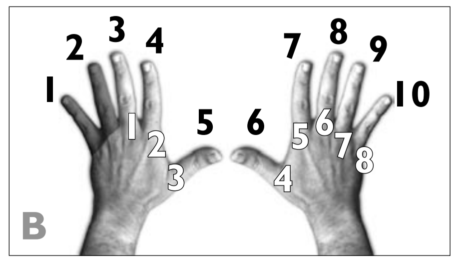
En primer lugar –y como en el caso de la suma– resulta muy conveniente considerar los dígitos como restas de 10 (lo que les falta para llegar a 10). Para ello podemos acudir al uso y visualización de los dedos, centrando la atención en la cantidad de dedos que, a partir de uno dado, faltan para completar los 10 de las dos manos. De esa ejercitación puede llegarse a los siguientes resultados:

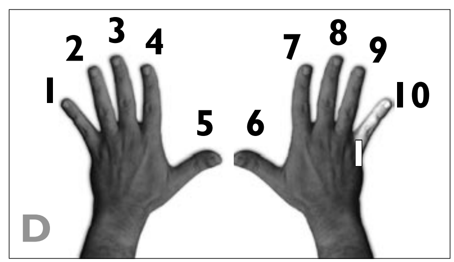
A.- a **1** le faltan **9** dedos para llegar a **10**
→ 10 – 1 = 9

B.- a **2** le faltan **8** dedos para llegar a **10**
→ 10 – 2 = 8

C.- a **8** le faltan **2** dedos para llegar a **10**
→ 10 – 8 = 2

D.- a **9** le falta **1** dedo para llegar a **10**
→ 10 – 9 = 1





De donde se llega a:

9 = 10 – 1   8 = 10 – 2   7 = 10 – 3
6 = 10 – 4   5 = 10 – 5   4 = 10 – 6
3 = 10 – 7   2 = 10 – 8   1 = 10 - 9

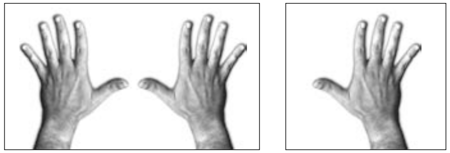
Con estos resultados podemos completar –con sumas y restas– el cuadro de “disociaciones” que planteábamos en el Cuaderno anterior:

5 = 1 + 4   5 = 2 + 3   5 = 3 + 2
5 = 4 + 1   6 = 5 + 1   7 = 5 + 2
8 = 5 + 3   9 = 5 + 4

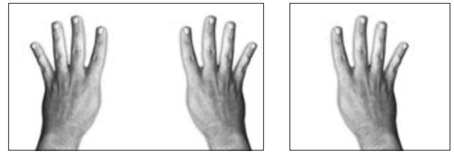
10 = 9 + 1   10 = 8 + 2   10 = 7 + 3
10 = 6 + 4   10 = 5 + 5   10 = 4 + 6
10 = 3 + 7   10 = 2 + 8   10 = 1 + 9

9 = 10 – 1   8 = 10 – 2   7 = 10 – 3
6 = 10 – 4   5 = 10 – 5   4 = 10 – 6
3 = 10 – 7   2 = 10 – 8   1 = 10 – 9

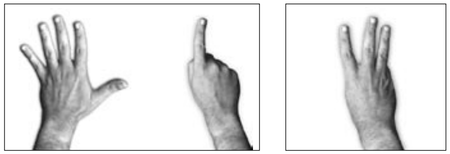
Otra de las destrezas que es conveniente alcanzar temprano es la de las mitades de los dígitos pares hasta 10. Para ello pueden juntarse las dos manos, palma con palma y dedo con dedo, y considerar simultáneamente el conteo de los dobles (de los dedos de una mano, hacia los correspondientes dedos de las dos manos juntas) con el de las mitades (de los dedos de las dos manos juntas, hacia los correspondientes dedos de una sola mano). Con ello se completaría el cuadro de dobles y mitades:



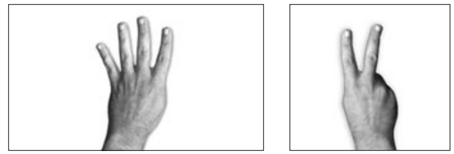
10 es el doble de **5**; **5** es la mitad de **10**.



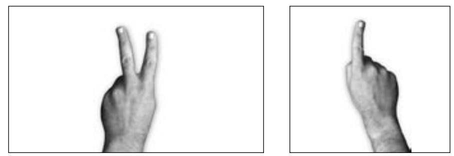
8 es el doble de **4**; **4** es la mitad de **8**.



6 es el doble de **3**; **3** es la mitad de **6**.



4 es el doble de **2**; **2** es la mitad de **4**.



2 es el doble de **1**; **1** es la mitad de **2**.

El mismo uso de los dedos puede servir de base para resolver las restas entre números menores que 10. La ejercitación física inicial debe dar paso a una visualización y, posteriormente, al manejo mental de la situación. Esta práctica, reflexiva e iterada, es la base para construir las *tablas de la resta* (el número en cada casilla es la diferencia de los dos dígitos que encabezan –en ese orden– la columna y la fila correspondientes a esa casilla):

–	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	-	-	0	1	2	3	4	5	6	7
3	-	-	-	0	1	2	3	4	5	6
4	-	-	-	-	0	1	2	3	4	5
5	-	-	-	-	-	0	1	2	3	4
6	-	-	-	-	-	-	0	1	2	3
7	-	-	-	-	-	-	-	0	1	2
8	-	-	-	-	-	-	-	-	0	1
9	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0

Estas tablas –como las de la suma– deben llegar a ser aprendidas de memoria, porque este es el modo adulto de manejarlas. Pero esto no significa que aprenderlas de memoria sea el punto de partida; más bien es el punto de llegada. El punto de partida está en la ejercitación, reflexiva e iterada, para obtener la cantidad que falta para llegar del dígito menor al mayor, o la cantidad en la que el dígito mayor excede al menor.

También conviene insistir en algunos resultados que se derivan de los expresados en la tabla anterior y que significan otro modo de leerla. Así, por ejemplo, se obtienen las siguientes "disociaciones" en forma de restas:

0 = 0 – 0 = 1 – 1 = 2 – 2 = 3 – 3, etc.
1 = 1 – 0 = 2 – 1 = 3 - 2 = 4 – 3, etc.
....
8 = 8 – 0 = 9 – 1
9 = 9 – 0

Hemos hablado de destrezas utilizables a la hora de restar dígitos. No está de más decir que, puesto que hablamos de dígitos, estas destrezas pueden aplicarse al caso de la resta de las unidades, de las decenas, de las centésimas, etc., es decir, de las unidades de cualquiera de los órdenes del sistema decimal de numeración.

De esta forma podemos extender el cuadro de las destrezas disociativas –tanto en sumas como en restas– presentadas en el Cuaderno anterior:

1 centena = 9 decenas + 1 decena = 8 decenas + 2 decenas, etc. Es decir:
100 = 90 + 10 100 = 80 + 20 100 = 70 + 30 100 = 60 + 40 100= 50 + 50

1 unidad = 9 décimas + 1 décima = 8 décimas + 2 décimas, etc. Es decir:
1 = 0,9 + 0,1 1 = 0,8 + 0,2 1 = 0,7 + 0,3 1 = 0,6 + 0,4 1 = 0,5 + 0,5 Etc.

9 decenas = 1 centena – 1 decena; 8 decenas = 1 centena – 2 decenas; etc. Es decir:
90 = 100 – 10 80 = 100 – 20 70 = 100 – 30 60 = 100 – 40 50 = 100 – 50

9 décimas = 1 unidad – 1 décima; 8 décimas = 1 unidad – 2 décimas; etc. Es decir:
0,9 = 1 – 0,1 0,8 = 1 – 0,2 0,7 = 1 - 0,3 0,6 = 1 – 0,4 0,5 = 1 – 0,5 Etc.

Todas las apreciaciones anteriores están formuladas para el caso básico de las restas entre dígitos –o, como extensión, entre unidades de cualquier orden del sistema decimal de numeración–. Pero también podemos destacar otras *regularidades* que se presentan cuando se producen algunas variaciones en las cantidades que aparecen en el minuendo, en el sustraendo, o en la diferencia de una resta dada.

Intente resolver los ejercicios que se proponen a continuación. Luego podemos comparar sus respuestas con las que se exponen posteriormente.

a) *¿Qué le ocurre a la diferencia en una resta si:*
1. *el minuendo aumenta en* ***1*** *unidad y el sustraendo permanece* ***igual****?*
2. *el minuendo aumenta en* ***2*** *unidades y el sustraendo aumenta en* ***2*** *unidades?*
3. *el minuendo aumenta en* ***3*** *unidades y el sustraendo disminuye en* ***1*** *unidad?*
4. *el minuendo disminuye en* ***2*** *unidades y el sustraendo permanece* ***igual****?*
5. *el minuendo disminuye en* ***1*** *unidad y el sustraendo aumenta en* ***2*** *unidades?*
6. *el minuendo permanece* ***igual*** *y el sustraendo aumenta en* ***2*** *unidades?*
7. *el minuendo permanece* ***igual*** *y el sustraendo disminuye en* ***1*** *unidad?*

b) ¿Qué modificaciones pueden hacerse a las cantidades del minuendo y del sustraendo de una resta para que la diferencia:

1. permanezca **igual**?
2. aumente en **5** unidades?
3. disminuya en **3** unidades?

c) *¿Qué le puede haber ocurrido al minuendo de una resta si:*

1. *el sustraendo ha disminuido en **2** unidades y la diferencia ha permanecido **igual**?*
2. *el sustraendo ha aumentado en **3** unidades y la diferencia ha aumentado en **3**?*
3. *el sustraendo ha permanecido **igual** y la diferencia ha disminuido en **5** unidades?*
4. *el sustraendo ha aumentado en **6** unidades y la diferencia ha disminuido en **4**?*
5. *el sustraendo ha disminuido en **5** unidades y la diferencia ha aumentado en **3**?*
6. *el sustraendo ha aumentado en **7** unidades y la diferencia ha permanecido **igual**?*

d) ¿Qué le puede haber ocurrido al sustraendo de una resta si:

1. el minuendo ha aumentado en **4** unidades y la diferencia ha disminuido en **3**?
2. el minuendo ha disminuido en **4** unidades y la diferencia ha disminuido en **5**?
3. el minuendo ha aumentado en **2** unidades y la diferencia ha aumentado en **6**?
4. el minuendo ha disminuido en **3** unidades y la diferencia ha aumentado en **7**?
5. el minuendo ha permanecido **igual** y la diferencia ha disminuido en **3**?
6. el minuendo ha disminuido en **4** unidades y la diferencia ha permanecido **igual**?

He aquí, brevemente, las respuestas:

a)
1. aumenta en **1** unidad;
2. permanece **igual**;
3. aumenta en **4**;
4. disminuye en **2**;
5. disminuye en **3**;
6. disminuye en **2**;
7. aumenta en **1**.

b)
1. añadir o quitar la misma cantidad simultáneamente en ambos;
2. que el minuendo aumente en **5** unidades y el sustraendo permanezca **igual**; o que el minuendo permanezca **igual** y el sustraendo disminuya en **5**; o que el aumento del minuendo supere en **5** al del sustraendo; o que la suma del aumento del minuendo y la disminución del sustraendo sea **5**; o que la disminución del sustraendo sea **5** unidades mayor que la del minuendo;
3. que el sustraendo aumente en **3** unidades y el minuendo permanezca **igual**; o que el sustraendo permanezca **igual** y el minuendo disminuya en **3**; o que el aumento del sustraendo supere en **3** al del minuendo; o que la diferencia del aumento del sustraendo y la disminución del minuendo sea **3**; o que la disminución del minuendo sea **3** unidades mayor que la del sustraendo.

c)
1. ha disminuido en **2**;
2. ha aumentado en **6**;
3. ha disminuido en **5**;
4. ha aumentado en **2**;
5. ha disminuido en **2**;
6. ha aumentado en **7**.

d)
1. ha aumentado en **7**;
2. ha aumentado en **1**;
3. ha disminuido en **4**;
4. ha disminuido en **10**;
5. ha aumentado en **3**;
6. ha disminuido en **4**.

6. Algunas estrategias para el cálculo mental de restas y sumas

La destreza en la resolución de ejercicios del tipo anterior es fundamental para manejar con soltura el cálculo mental de las sustracciones. Sobre la base de esa destreza es posible precisar algunas estrategias para facilitar las operaciones mentales de restar. A ellas agregaremos alguna otra para la suma, complementaria de las presentadas en el Cuaderno anterior.

1. *Introducir algunas variaciones en las cantidades del minuendo, del sustraendo, o de ambos, y ajustar luego la diferencia*. En este apartado puede incluirse la estrategia de *acercar el sustraendo a potencias o múltiplos de 10*. Por ejemplo, en la resta $165 - 39$, podemos llevar el sustraendo a 40, con lo que la resta queda más sencilla: $165 - 40 = 125$. Si volvemos a la resta inicial, vemos que el minuendo es el mismo y que el sustraendo disminuye en 1, por lo que la diferencia debe aumentar en 1. Así, $165 - 39 = 126$.

Otra estrategia similar es la de *añadir o restar la misma cantidad en el minuendo y en el sustraendo*. Por ejemplo, en la misma resta $165 - 39$, podemos agregar 1 unidad a ambos números, con lo que la resta se transforma en $166 - 40 = 126$. Como hemos agregado lo mismo en el minuendo y en el sustraendo, la diferencia no varía. Por consiguiente, $165 - 39 = 126$.

En otras oportunidades puede resultar estratégico *modificar adecuadamente uno de los términos de la resta*. Por ejemplo, en la resta $463 - 267$ puede modificarse el minuendo para llevarlo a 467, con lo que la operación se hace más fácil: $467 - 267 = 200$. Ahora bien, en la resta original el minuendo disminuye en 4 unidades, por lo que la diferencia debe disminuir también en 4. Así, $463 - 267 = 196$. Obsérvese que también pudo haberse modificado el sustraendo y llevarlo a 263, y proceder análogamente.

2. *Transformar la resta en una suma por etapas*. Se trata de pensar la sustracción como modelo de "lo que falta para", y proceder desde la cantidad del sustraendo hacia la del minuendo por "cómodas" etapas –como quien da el "vuelto" de un pago–, cuyo valor se suma al final. Así, por ejemplo, si se desea restar $921 - 397$, procedemos de esta manera:

de 397 a 400 → 3
de 400 a 900 → 500
de 900 a 921 → 21

La suma de las etapas es: $500 + 21 + 3 = 524$. Por consiguiente, $921 - 397 = 524$

3. *Utilizar la disociación de los dígitos mayores como restas de 10*. Es decir, pensar 9 como $10 - 1$; 8 como $10 - 2$; etc. Esto significa que sumar 9 es sumar 10 y restar 1, sumar 8 es sumar 10 y restar 2, etc. Por ejemplo, $56 + 9$ puede transformarse mentalmente en añadir 10 ($56 + 10 = 66$) y restar 1 ($66 - 1 = 65$). También significa que restar 9 es restar 10 y agregar 1, restar 8 es restar 10 y añadir 2, etc. Por ejemplo, $123 - 8$ puede transformarse mentalmente en quitar 10 ($123 - 10 = 113$) y agregar 2 ($113 + 2 = 115$).

7. El apoyo de otras representaciones gráficas

Además del conjunto de las tablas de restar antes presentadas, es posible elaborar otras que nos permiten fomentar el desarrollo de destrezas a la hora de efectuar diversas restas. La primera de estas representaciones es la tabla de los números de 1 a 100:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	56	57	**58**	59	60
61	62	63	64	65	66	67	**68**	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	**86**	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

En ella, si se observa cada fila, el paso de un número a su siguiente a la derecha significa la adición de una unidad, y si el paso es hacia la izquierda, la sustracción de una unidad. Análogamente para cada columna, el paso a cada número inferior –"bajar un piso"– representa la adición de una decena, y "subir un piso", la sustracción de una decena.

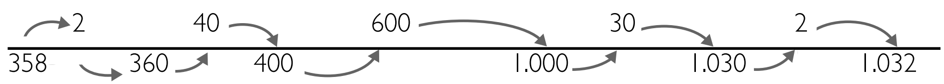
De acuerdo con este par de criterios, si se quiere restar, por ejemplo, **86 - 38**, nos ubicamos en el número del minuendo (**86**); restarle **38** significa "subir **3** pisos (llegar a **56**) y correrse **8** números a la izquierda (**6** hasta **50**, y **2** más hasta **48**)", o bien "correrse **8** números a la izquierda (**6** hasta **80**, y **2** más hasta **78**) y subir **3** pisos (llegar a **48**)".

Otra de las representaciones gráficas –sin las limitaciones que impone la tabla anterior, en la que los minuendos no pueden pasar de 100– utiliza la recta numérica como soporte visual, y la suma por etapas como estrategia para restar. Sea, por ejemplo, la resta **1.032 - 358**. Ubicamos el sustraendo (**358**) en un punto cualquiera de la recta. Ahora procedemos hacia el minuendo (**1.032**) por "cómodas" etapas.

En la primera de las gráficas percibimos (números sobre la línea) cómo vamos avanzando "por saltos" adecuados, buscando los múltiplos o potencias de **10** (bajo la línea):

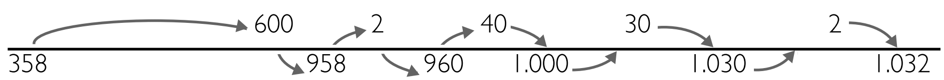
También puede operarse del minuendo hacia el sustraendo. Como puede apreciarse, este procedimiento representa la visualización de la estrategia de restar como una suma por etapas. Además puede inferirse que la representación de la operación sobre la recta numérica quizás es más útil en el caso de la resta –particularmente en las situaciones en que hay que "pedir prestado"– que en el caso de la suma.

En definitiva, y como puede apreciarse, existe una diversidad de caminos para llegar al resultado de la resta. No es conveniente cerrarnos en uno solo, por lo que dijimos en el Cuaderno 1. Es preferible exponer todos los que se puedan y dejar que nuestra creatividad –y la de nuestros alumnos– halle otros. Después, cada quien terminará por seleccionar el que mejor se acomode a la situación propuesta o el que mejor vaya con su estilo personal de hacer las cosas: una diversidad abierta a la posibilidad de elegir…



La suma de estos saltos o etapas nos proporciona la diferencia de ambos números: **1.032 – 358 = 600 + 40 + 30 + 2 + 2 = 674.**

Hay varias alternativas para efectuar esta suma por saltos. Una de ellas es la siguiente:



Efectúe mentalmente las siguientes restas y sumas (hágalo de todas las formas que se le ocurran):

a) 308 – 197	**b)** 135 – 39	**c)** 864 – 759
d) 82 – 27	**e)** 102 – 33	**f)** 45 – 9
g) 426 – 98	**h)** 154 – 45	
i) 1.016 – 617	**j)** 761 – 139	**k)** 99 – 18
l) 505 – 487	**m)** 172 – 75	**n)** 68 + 39
ñ) 198 + 577	**o)** 184 + 117	**p)** 301 + 569

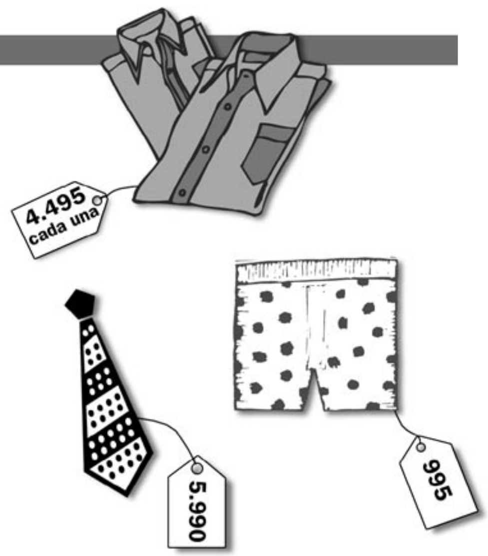
Invéntese otra serie de ejercicios similares a los anteriores y resuélvalos.

8. Estimar el valor de la diferencia

Las consideraciones acerca de la estimación en el caso de la suma pueden extenderse también a las situaciones de resta. Veamos una, por ejemplo:

Volvamos a nuestra tienda de ropa. Compro dos prendas cuyo precio unitario es de **4.495** pesos, otra de **5.990** pesos y una última de **995** pesos. Para pagar entrego **20.000** pesos. Quiero saber si el vuelto que me van a dar llegará a los **4.000** pesos.

Lo primero es redondear los precios a 4.500, 6.000 y 1.000 pesos, respectivamente (los hemos puesto un poquito más caros…). Ahora vamos acumulando mentalmente el costo total. Las dos primeras prendas nos dan 9.000 pesos; con la cuarta llegamos a 10.000 y con la tercera, a 16.000. Por consiguiente, nos van a dar un poquito más de 4.000 pesos.



Las competencias que se ponen de manifiesto al estimar el valor de una diferencia son similares a las del caso de la suma. En primer lugar, se produce un análisis inicial de la situación, análisis que lleva a la conclusión de la pertinencia del uso de la estimación. Ya dentro del proceso, se “leen” las cantidades de izquierda a derecha y se toma en cuenta su valor global, lo que permite redondearlas sin mayor riesgo. Esa lectura permite también dar su verdadero sentido al valor de posición de cada cifra; así, por ejemplo, en el caso de la tercera prenda, 6 no es “seis”, sino “seis mil”.

Con el fin de facilitarnos las tareas de estimación en el caso de la resta, presentamos algunas estrategias recomendadas por la experiencia de los buenos estimadores:

1. *Redondear el valor del minuendo y del sustraendo*, bien sea por exceso o por defecto, según lo recomiende la situación (véase el caso de las prendas de vestir). Por ejemplo, la resta **2.985 – 612** puede llevarse a **3.000 – 600** (redondeo del minuendo hacia arriba y del sustraendo hacia abajo), o bien a **3.000 – 630** (redondeo de ambos hacia arriba), según sea el margen de aproximación que nos podamos permitir.

2. *Compensar el valor de la diferencia.* Volviendo al ejemplo anterior, podemos optar por la primera aproximación: **3.000 – 600**, que es más fácil de calcular, y llegar al resultado de **2.400**. Pero advertimos que **3.000 – 630** es una mejor aproximación, por cuanto al redondear ambos valores hacia arriba la diferencia se ve menos afectada. Entonces, al resultado obtenido (**2.400**) le restamos las **30** unidades de incremento del sustraendo y llegamos a una diferencia más ajustada, **2.370**.

Tome los ejercicios de cálculo mental propuestos anteriormente y estime cada resultado.

9. Tengo ante mí una situación de resta; y ahora, ¿qué hago?

1. *Observo la situación* y decido si necesito un resultado exacto o me basta con una aproximación. En el segundo caso, procedo por la vía de la estimación, tal como se ha presentado.

2. Si necesito un resultado exacto, *leo el minuendo y el sustraendo* y observo si se van a producir –o no– situaciones de "pedir o quitar prestado".

3. En función del análisis anterior, *decido la vía* que voy a utilizar para *realizar* la resta (alguna de las siguientes):

- La visualizo y resuelvo sobre la tabla de números del 1 al 100.
- La visualizo y resuelvo sobre la recta numérica.
- Resto sumando por etapas del sustraendo al minuendo, pero sin necesidad del recurso gráfico.
- Aplico las diversas estrategias de cálculo mental.
- Resuelvo la resta en forma escrita, colocando ordenadamente los dígitos del sustraendo debajo de los del minuendo.

4. *Reviso la diferencia* obtenida. Para ello, en primer lugar evalúo su *verosimilitud*, es decir, si a la vista de las cantidades del minuendo y del sustraendo, la diferencia tiene sentido (obsérvese que este es un ejercicio de estimación…).

Y para *validar la exactitud de la resta*, en principio puedo seguir una vía distinta a la utilizada. También puedo servirme de las *dos pruebas* que se derivan del hecho de ser la sustracción la operación inversa de la suma: sumo la diferencia con el sustraendo y evalúo si obtengo el minuendo; o bien, resto del minuendo la diferencia y evalúo si obtengo el sustraendo.

Este proceso puede seguirse tanto si se trata de un ejercicio directo de resta o de estimación –con lo cual el paso 1 queda decidido–, como si se trata de una situación problema que implique la sustracción como modelo adecuado.

Lo que sí conviene destacar es que, escritos el minuendo y el sustraendo para hacer la resta, sea que se dispongan horizontal o verticalmente, *este "espacio" del ejercicio escrito no es necesariamente el espacio en el que se realiza efectivamente la resta.* La operación puede realizarse con toda libertad por cualquiera de las vías propuestas, y algunas de ellas no necesitan recursos para escribir (papel y lápiz o pizarra y tiza…), sino una mente activa. *El "espacio" del ejercicio escrito es simplemente el espacio en el que se leen las cantidades a restar y en el que luego se escribe la diferencia.*

10. La resolución de "problemas de resta"…

Los "problemas de resta" –como los de suma– pueden adoptar la forma de situaciones sencillas de la vida diaria en las que la sustracción aflora sin dificultad como la operación matemática que sirve de modelo oportuno. Otras veces, pueden tener un carácter lúdico, o referirse a regularidades o características que presentan algunos números y series de números. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Lo que sugerimos a nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia, antes de revisar la respuesta que se presenta posteriormente.

8. *Si tengo **17** ovejas y se me escapan todas menos **9**, ¿cuántas me quedan?*

9. Dados los dígitos **2**, **5**, **9**, y utilizados sin repetición, calcule la menor diferencia posible entre los números de tres cifras que pueden construirse con ellos.

10. *¿Cuántas hojas de un libro tengo que pasar para llegar a la página **117** desde la página **112**? ¿Y de la página **263** a la **268**? ¿Es igual en ambos casos?*

11. Vamos corriendo **10** atletas. Si soy el **8º** por la cola, ¿en qué puesto voy en la carrera?

***12.** Hoy he leído la novela desde el comienzo de la página **13** hasta el final de la página **34**. ¿Cuántas páginas he leído hoy?*

13. Las **4** cifras que componen un número son dígitos pares escritos en orden ascendente de izquierda a derecha. Este número, al sumarse con otro, da como resultado **2.989**. ¿Con qué otro número se ha sumado?

***14.** ¿Cuántas veces puede sustraerse **20** de **80**?*

15. ¿Cuántos días tarda un sastre en cortar una pieza de **20** metros de largo en lotes de **2** metros diarios?

11. La resolución de problemas de suma y resta

Con mucha frecuencia se presentan situaciones en la vida diaria, o bien otras lúdicas, o relacionadas con regularidades en números y en secuencias de números, que atañen simultáneamente a las dos operaciones de suma y resta. Vamos a plantear algunos de estos tipos de problemas. Nuestra sugerencia para nuestros lectores es que, una vez leído el enunciado de cada situación, intenten resolver el problema por cuenta propia, antes de revisar la vía de solución que se propone posteriormente.

a) Por la compra de **2** cuadernos y **un** juego geométrico, Rafael ha pagado **900** pesos. Mariana, por su parte, ha comprado en el mismo establecimiento **un** cuaderno y **2** juegos geométricos y ha pagado **960** pesos. ¿Cuál es el precio de un cuaderno? ¿Y el de un juego geométrico?

b) *En una balanza dispongo de tres pesas: una de **1** kg, una de **3** kg y otra de **9** kg. Para pesar los objetos, las pesas pueden colocarse (1, 2 ó las 3) en cualquiera de los dos platillos. ¿Cuántas pesadas diferentes pueden hacerse?*

c) En una feria hay un puesto donde la gente puede probar su puntería intentando darle al blanco. Por cada tiro acertado se reciben **3** caramelos y por cada tiro errado se devuelven **2**. Aunque Rafael ha perdido **5** veces, tiene **11** caramelos consigo. ¿Cuántas veces le ha dado al blanco?

d) *En una habitación hay taburetes de **3** patas y sillas de **4** patas. En este momento todos estos asientos están ocupados y, entre piernas y patas, se cuentan **39** extremidades. ¿Cuántos taburetes hay en la habitación?*

e) ¿Cuál es el valor de **49 – 44 + 43 – 38 + 37 – 32 + … + 13 – 8 + 7 – 2**?

f) *Pedro compró algunos helados, los vendió a **240** pesos cada uno y obtuvo una ganancia de **280** pesos. Si los hubiera vendido a **180** pesos cada uno habría tenido una pérdida de **140** pesos. ¿A qué precio compró Pedro cada helado? ¿Y cuántos helados compró?*

g) La suma de las tres cifras de un número entero **N** es **21**. Si se cambian de posición entre sí la cifra de las unidades con la de las decenas, el nuevo número es **45** unidades mayor que **N**. ¿Qué número es **N**?

h) *Pedro, nuestro heladero, vende helados de fresa (**F**), de chocolate (**C**) y de mantecado (**M**). Acaba de hacer un sondeo entre sus últimos **121** compradores y ha descubierto que **42** de ellos prefieren primero los de fresa, luego los de mantecado y, finalmente, los de chocolate. Representamos esta información así:*

42: F > M > C

Pero también ha descubierto que:

40: C > M > F

*Y que: **39: M > C > F***

Si se toma toda esta información en conjunto, ¿cuál es el verdadero orden de preferencia que los compradores manifiestan acerca de los tres sabores de los helados?

i) Anita se encuentra en el **7º** escalón de una escalera que tiene **10**. Si se mueve **4** escalones, ¿en cuál se detendrá?

***j)** Blanca Nieves va a repartir **77** pastillas de chiquitolina entre los **7** enanitos. Al menor le da algunas pastillas y, a cada uno de los demás, una pastilla más que al anterior. ¿Cuántas pastillas de chiquitolina recibe el mayor?*

k) Cuatro equipos juegan un torneo de fútbol, en el que cada equipo juega un partido con cada uno de los demás. Por cada partido ganado se acumulan **3** puntos y por cada uno empatado, **1** punto. Al final de los **seis** partidos la clasificación nos dice que hay un equipo con **5** puntos, **dos** con **3** puntos y **uno** con **2** puntos. ¿Cuántos empates se han producido en el torneo?

***l)** Tenemos un reloj de arena que tarda **15** minutos en agotarse (pasar toda la arena de la parte superior a la inferior) y otro que lo hace en **9** minutos. ¿Cómo podemos medir **12** minutos exactos utilizando ambos relojes?*

m) El precio por el uso de un estacionamiento está formado por un valor fijo para las **dos** primeras horas y un pago adicional por cada hora siguiente. Si por **3** horas de estacionamiento se pagan **500** pesos, y **700** pesos por **5** horas, ¿cuánto costará estacionar el carro durante **8** horas seguidas?

***n)** Silvia tiene **2** muñecas; Teresa, **4** y Rosa, **3**. Si entre todas regalan **6** muñecas, ¿cuántas muñecas le quedan a cada una?*

Vamos, pues, a reportar algunas vías de solución para contrastarlas con las que hemos podido obtener entre todos.

a) Primero, como siempre, vamos a observar el enunciado del problema. Rafael y Mariana comparten una compra común: un cuaderno y un juego geométrico. Sobre esta base común, Rafael compra un cuaderno más y Mariana, un juego más. Vamos a explotar esta situación. Como Mariana paga **60** pesos más (**960 – 900**) que Rafael, esta diferencia sólo puede deberse a que el juego geométrico es **60** pesos más caro que el cuaderno.

Por otro lado, también puedo tener otro dato si me fijo en lo que han costado todos los artículos: **3** cuadernos y **3** juegos geométricos cuestan **1.860** pesos (**960 + 900**). De aquí deducimos que cada pareja de un cuaderno y un juego cuesta la tercera parte, es decir, **620** pesos.

Ahora todo se reduce a hallar dos números que, sumados, den **620** y, restados, **60**. Podemos proceder por tanteo. También podemos calcular la mitad de **620** (**310**) y, a partir de esa cantidad, sumar y restar **30** –para garantizar que la suma de los dos números sea **620** y su diferencia **60**–. Los números así obtenidos son **340** (**310 + 30**) y **280** (**310 – 30**): su suma es **620** y su diferencia, **60**. El cuaderno cuesta **280** pesos y el juego geométrico, **340**.

Nos falta validar estos resultados, por lo que regresamos al enunciado del problema. Por dos cuadernos y un juego se pagan: **280 + 280 + 340 = 900** pesos. Y por un cuaderno y dos juegos: **280 + 340 + 340 = 960** pesos.

¿Existe otra vía para resolver el problema? Sí. Por ejemplo, pueden asignarse precios por tanteo al cuaderno y al juego –éste, un poco más caro–. Un punto de partida puede ser de **250** y de **400** pesos, respectivamente. Con estos valores se satisface el monto pagado por Rafael (**250 + 250 + 400 = 900** pesos), pero se sobrepasa (**250 + 400 + 400 = 1.050** pesos) el de Mariana. Por consiguiente, hay que subir el precio del cuaderno y rebajar el del juego. Mediante este proceso de ensayo y ajuste se llegaría a los valores exactos.

b) Pues se pueden pesar objetos de **1**, **2**, **3**, … hasta **13** kg. Para un objeto de **1** kg, basta colocar una pesa de **1** kg en el otro platillo. Para uno de **2** kg, añadimos la pesa de **1** kg en el mismo platillo y ponemos la de **3** kg en el otro. Y así, sucesivamente. Para un objeto, por ejemplo, de **7** kg, añadimos la pesa de **3** kg en el mismo platillo y ponemos las de **1** y **9** kg en el otro.

Y ahora, ¿hasta cuántas pesadas diferentes se podrán hacer si incluimos una pesa de **27** kg en el juego de pesas anterior?

c) Si Rafael ha perdido **5** veces, ha tenido que devolver **10** caramelos. Si a éstos agregamos los **11** que tiene, se deduce que en total ha ganado **21** caramelos, lo que corresponde a **7** tiros acertados.

d) No sabemos cuántos taburetes y sillas hay, pero si todos los asientos están ocupados, las "extremidades" de cada taburete (patas y piernas) son **5** y las de cada silla, **6**. Procedamos por tanteo hasta descubrir alguna regularidad. Si hubiera una silla, quedarían **33** (**39 – 6**) extremidades para los taburetes. Pero esto no es posible, porque la suma de las extremidades de todos los taburetes tiene que acabar en **5** ó en **0** (¿por qué?).

Siguiendo con el tanteo –pero sabiendo ya las condiciones de la respuesta válida–, si pensamos en **2** sillas, nos quedarían **27** (**39 – 12**) extremidades para los taburetes: tampoco puede ser. Así llegamos hasta suponer que hay **4** sillas (**24** extremidades en ellas), lo que deja **15** (**39 – 24**) para los taburetes. Por consiguiente, habrá 3 taburetes y 4 sillas. Verifique que no hay otra respuesta posible.

e) Primero y como siempre, hay que observar bien la sucesión de números: **49 – 44 + 43 – 38 + 37 – 32 + … + 13 – 8 + 7 – 2**. En esta observación podemos descubrir que hay parejas de números restándose: (**49 – 44**) + (**43 – 38**) + (**37 – 32**) + … + (**13 – 8**) + (**7 – 2**), que el minuendo de cada pareja –a partir de la segunda– es **1** unidad menor que el sustraendo de la pareja anterior, y que la diferencia de cada pareja es **5**.

El ejercicio se reduce a sumar **5** tantas veces como parejas hay: **8** veces. El valor final de la sucesión de los números dados es **40**.

f) De la observación del enunciado deducimos que el precio de compra debe encontrarse entre **180** y **240** pesos, y más cerca de **180** que de **240**, ya que en el primer caso hay menos pérdidas (**140** pesos) que ganancias (**280** pesos) en el segundo.

Podemos tantear con un valor que satisfaga esas condiciones: que cada helado cueste **190** pesos. En este caso, si se venden en **240** pesos se ganan **50** por helado. Pero esto no es posible, ya que la ganancia total es de **280** pesos (¿por qué no es posible?). Probemos con un costo de **200** pesos. La ganancia por helado ahora es de **40** (**240 – 200**) pesos y la pérdida, de **20** (**200 – 180**) pesos. Estos resultados sí cuadran, porque en ambos casos se descubre que el total de helados comprados es de **7**.

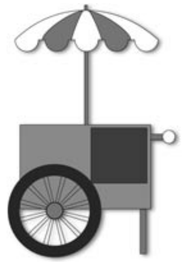
Conviene destacar que este problema, como algunos otros de los planteados, se puede resolver mediante operaciones de sumas y restas, y no necesariamente haciendo uso de multiplicaciones o divisiones. Por ejemplo, en el problema anterior se puede averiguar que son **7** los helados comprados: **a)** restando progresivamente **20** pesos de los **140** pesos iniciales y de las diferencias que vayan quedando, y contando las veces que se resta hasta llegar a **0**; **b)** sumando progresivamente **20 + 20 +** …, hasta llegar a **140**, y contando el número de veces que se utilizó el sumando; **c)** y **d)** procediendo análogamente con las ganancias, **40** y **280** pesos.

Precisamente, esta forma de actuar nos va preparando para entender la multiplicación de números naturales como una suma repetida; y la división, como una resta repetida.

g) De nuevo, la observación nos dice que las cifras son relativamente altas (suman **21**) y que la de las unidades es menor que la de las decenas (porque al "voltearlas" resulta un número mayor en **45** unidades). Una vía de salida puede ser la de pensar en números de **dos** dígitos (decena-unidad) tales que, al restarse con el número volteado, den una diferencia de **45**.

Una exploración en este sentido nos permite descubrir las parejas **05** y **50**, **16** y **61**, **27** y **72**, **38** y **83**, **49** y **94**. No puede haber más. Ahora, para seleccionar la(s) que resuelve(n) el problema, acudimos a la condición de que la suma de los dígitos sea **21**. La única pareja que puede satisfacerla es la **49** y **94**, que se complementaría con la cifra 8 en la posición de las centenas. En todas las demás parejas, la suma de sus dígitos es insuficiente para que, al sumar el tercer dígito (cuyo valor máximo es **9**), se pueda llegar a **21**. De modo que el número N es **849**. Es fácil verificarlo.

h) No podemos dejarnos guiar por la información de cada una de las tres comparaciones, pues en cada una de ellas puntea



un sabor diferente. Tampoco podemos tomar la primera como determinante (el sabor preferido es **F**), por aquello de que son **42** (el número mayor de los tres obtenidos por Pedro) los que opinan así.

En realidad, debemos tomar en consideración el conjunto de las informaciones. Una vía para hacerlo es referirnos a las comparaciones por parejas de sabores. Así, entre **F** y **M**, **42** prefieren a **F**, pero **79** (**40 + 39**) anteponen el sabor **M** a **F**. Análogamente, entre **F** y **C**, **42** prefieren a **F**, pero **79** (**40 + 39**) anteponen el sabor **C** a **F**. En conclusión, **F** figura detrás de **M** y **C** en el gusto de los compradores.

La cuestión está, entonces, en determinar la preferencia entre **M** y **C**: **40** prefieren a **C**, pero **81** (**42 + 39**) anteponen el sabor **M** a **C**. Por consiguiente, el verdadero orden de preferencia que los compradores manifiestan acerca de los tres sabores de los helados es: **M > C > F.**

i) Esta es una situación interesante, que no se resuelve simplemente mediante una suma o una resta. Hay que analizar todas las posibilidades del caso, en virtud de que "moverse" no especifica el sentido del movimiento, hacia arriba o hacia abajo.

Las alternativas posibles son –todas a partir del **7º** escalón– las siguientes (**nA**: **n** escalones hacia arriba; **mB**: **m** escalones hacia abajo):

Alternativas de movimiento	Escalón final
3A y 1B	9º
2A, 1B y 1A	9º
2A y 2B	7º
1A, 1B, 2A	9º
1A, 1B, 1A y 1B	7º
1A, 2B, 1A	7º
1A y 3B	5º
1B y 3A	9º
1B, 2A y 1B	7º
1B, 1A, 1B y 1A	7º
1B, 1A y 2B	5º
2B y 2A	7º
2B, 1A y 1B	5º
3B y 1A	5º
4B	3º

Como puede observarse, la situación tiene **4** posibles desenlaces (respuestas), todos en escalones impares. ¿Qué hubiera pasado si Anita se moviera un número impar de escalones?

j) Observamos que las dosis de pastillas forman una secuencia de **7** números enteros seguidos, cuya suma debe ser **77**. La vía a seguir parece ser, de nuevo, la del tanteo razonado. Supongamos que el más pequeño recibe **3** pastillas; la secuencia será: **3**, **4**, … **8**, **9**, cuya suma es **42** pastillas.

Vemos que a ese total le faltan **35** (**77 – 42**) para ajustarse al total pedido. Si repartimos esas **35** pastillas entre los **7** enanitos, a cada uno le corresponderían **5** pastillas más. Por lo tanto, la secuencia será: **8**, **9**, **10**, **11**, **12**, **13** y **14** pastillas.

k) Es importante recordar que cada equipo ha jugado **3** partidos. Las puntuaciones finales (equipo **A**, **5** puntos; **B**, **3**; **C**, **3**; **D**, **2**) nos sugieren que por lo menos hay 2 empates: los de **A** y los de **D**. A partir de aquí puede pensarse que **B** y **C** han ganado un partido cada uno, con lo que llegarían a **3** puntos cada uno, así como **A**, que llegaría a **5** puntos. Si esto fuera así, la tabla de clasificación final sería:

Equipos	J. ganados	J. empatados	J. perdidos	J. jugados
A	1	2	0	3
B	1	0	2	3
C	1	0	2	3
D	0	2	1	3

Pero esta tabla reporta **3** partidos ganados y **5** perdidos, situación imposible, pues ambas cantidades deben coincidir. La única forma de corregir este error es suponer que los **3** puntos de **B** y de **C** provienen de sendos empates, con lo cual la tabla se modifica de esta forma:

Equipos	J. ganados	J. empatados	J. perdidos	J. jugados
A	1	2	0	3
B	0	3	0	3
C	0	3	0	3
D	0	2	1	3

En el torneo se han producido 5 empates.

l) Esperemos que hayan llegado a una respuesta… He aquí una alternativa. En primer lugar y para orientar nuestra búsqueda, los **12** minutos a medir deben ser seguidos, sin interrupciones, a partir de cierto momento (no necesariamente desde el comienzo de la movida de los relojes).

Bien. Empecemos a vaciar simultáneamente ambos relojes (llamaremos **Q** al reloj que se vacía en **15** minutos, y **N** al otro). A los **9** minutos, **Q** tiene "carga" para **6** minutos más y **N** está vacío. Volteamos **N**. Este va a ser nuestro momento inicial. **6** minutos después, **Q** se vacía y **N** tiene una "carga" de **3** minutos más. En este momento, **N** se voltea y se espera a que pasen los **6** minutos que necesita para vaciarse de nuevo. Así, han pasado los **12** minutos seguidos.

m) Indudablemente, la respuesta no es **1.200** pesos (**500 + 700**), como si se tratara de sumar lo pagado por **3** horas y por **5** horas.

La observación del enunciado nos permite inferir que el precio de **2** horas adicionales es de **200** pesos (la diferencia del costo por **5** horas, menos el costo por **3** horas: **700 – 500**). Por consiguiente, el precio de la hora adicional es de **100** pesos. Con este dato es fácil obtener el costo fijo de las dos primeras horas: **400** pesos. Así, por **3** horas (**2** fijas + **1** adicional) se pagan: **400 + 100 = 500** pesos, y por **5** horas (**2** fijas + **3** adicionales): **400 + 300 = 700** pesos.

El cálculo del costo de las **8** horas (**2** fijas + **6** adicionales) será: **400 + 600 = 1.000** pesos.

Otra vía para resolver el problema es, de nuevo, la del tanteo razonado. Puede asignarse un valor para el costo de las dos horas iniciales y otro para cada hora adicional, y proceder por ensayo y ajuste.

n) Entre las tres niñas poseen **9** muñecas. Al regalar **6**, les van a quedar **3** muñecas. Las posibilidades de respuesta son diversas:

Silvia	Teresa	Rosa
2	1	0
1	2	0
1	1	1
1	0	2
0	3	0
0	2	1
0	1	2
0	0	3

No podemos terminar esta parte dedicada a los problemas de sumas y restas sin reiterar la reflexión que, sobre la forma en que los hemos abordado y resuelto, hicimos en el Cuaderno anterior. He aquí algunas conclusiones, que seguramente compartimos todos:

1. El método que aparece como más utilizado y eficiente sigue siendo el del *tanteo razonado*. Como decíamos, es un método científico excelente, que nos acostumbra a formular hipótesis razonables –ajustadas a las condiciones de la situación– y a verificarlas en la práctica. Todo esto refleja un proceso permanente de toma de decisiones, así como de control sobre la propia actividad.

2. La valoración del método de tanteo razonado no debe excluir la consideración y práctica de *otros métodos* a la hora de resolver problemas. Por ejemplo, algunos de los problemas que acaban de trabajarse podían haberse planteado y resuelto por la vía algebraica, es decir, utilizando incógnitas y ecuaciones.

3. Volviendo a las formas en que hemos trabajado los problemas anteriores, nunca insistiremos demasiado acerca del valor de la *observación*: observar el enunciado de la situación, las condiciones que afectan a las variables, los casos posibles, las hipótesis que formulamos, los resultados parciales que vamos obteniendo…

4. Otro punto a destacar es la presencia de ciertas *técnicas* que van apareciendo en determinados problemas: a veces, hay que inducir casos generales o regularidades a partir de casos particulares, pero otras veces hay que considerar todos los casos posibles… Es la práctica de resolver problemas por vías aritméticas la que nos enseñará la selección oportuna de la técnica más adecuada en cada caso.

5. Finalmente, debemos insistir en la *atención* que siempre hay que prestar al enunciado de la situación. No hay que dejarse llevar por ciertas expresiones ("juntos", "menos", "dentro de tanto", "más", y similares) como si su presencia garantizara automáticamente la aplicación de la suma o de la resta como modelos de las situaciones y como operaciones que, aplicadas a los datos, nos llevarán indefectiblemente a la respuesta.

12. Y en la escuela, de la resta, ¿qué?

Este es un punto para reflexionar individualmente y para discutir colectivamente. Hay que llegar a acuerdos acerca de lo que se debe hacer con este tema en la escuela, en los diversos grados. No vamos a entrar en detalle –porque éste no es el lugar para ello–, pero ya los lectores deben haber quedado claros: hay mucho que hacer, más allá de las habituales y rutinarias "cuentas", y más allá de los primeros grados. Saber restar es mucho más que eso, como se habrá apreciado.

- Hay que abrir el campo, ampliamente, al cálculo mental, porque nos interesa el desarrollo de destrezas. Este puede ser el punto de partida.

- Las restas escritas pueden venir posteriormente y más dosificadas, en menor cantidad. Eso sí, se debe alcanzar la competencia necesaria en este punto.

- Trabajar con la resta debe basarse –y a la vez, proporcionar un fortalecimiento– en el dominio del sistema decimal de numeración.

- Ante una resta propuesta, la primera tarea debe ser la de observar y leer las cantidades, y estimar el resultado. Luego puede obtenerse el resultado exacto, bien sea efectuando la resta escrita, bien sea por la vía gráfica o del cálculo mental, o bien utilizando la calculadora (ésta puede ser muy útil en tareas de verificación…), y validarlo. Uno de los objetivos de la obtención de la respuesta exacta debe ser el de evaluar la estimación hecha, con el fin de ir afinando dicho proceso.

- La resolución de problemas debe propiciar el planteamiento de ejercicios y problemas motivadores, al estilo de los propuestos aquí. No tengamos miedo de exigir a nuestros alumnos; más bien, ellos están esperando que lo hagamos.

13. Y ahora, otros ejercicios "para la casa"…

16. Si a la suma de dos números se agrega su diferencia, se obtiene **82**. ¿Cuánto vale el número mayor?

Escriba 5 soluciones posibles para el siguiente ejercicio: **❑ – (❑ - ❑) + ❑ = *10***. ***Nota**: El ❑ puede tomar, en cada posición, un valor diferente. Recuerde que la presencia de los paréntesis indica que debe resolverse primero lo que se encuentra en su interior.*

17. En la secuencia numérica **4**, , , , **32**, cada término a partir del 3° se obtiene sumando los dos anteriores. Halle los tres términos faltantes.

18. *Carlos tiene **la mitad** de dinero que Julio. Si Julio le diera **5.000** pesos a Carlos, éste tendría **4.000** pesos menos de los que tiene Julio ahora. ¿Cuánto tenían entre ambos al comienzo?*

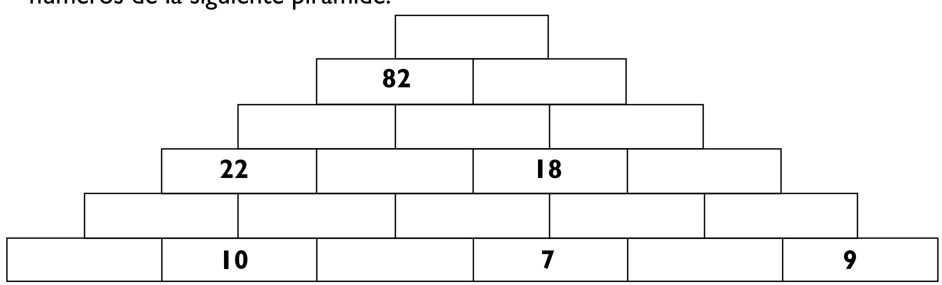
19. Luisa, Amalia y Miriam tienen ***10*** caramelos cada una. ¿Cuántos caramelos debería dar Amalia a cada una de sus dos amigas para que, luego del reparto, Luisa tenga ***13*** caramelos más que Amalia, y Miriam tenga **2** menos que Luisa?

20. *La suma de **4** números es **3.584**. Si el **1°** aumenta en **13**, el **2°** disminuye en **21**, el **3°** disminuye en **18** y el valor de la suma no se altera, ¿qué le pasó al **4°** sumando?*

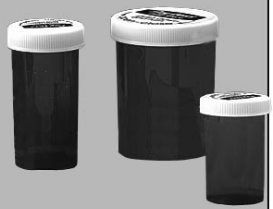
21. La Sra. Tomasa nació **17** años después que el Sr. Ramón, y murió **2** años antes que éste. Si el Sr. Ramón vivió **85** años, ¿cuántos años vivió la Sra. Tomasa?

22. *Cuatro socios han ganado **21.175** pesos. El **1°** ha de recibir **4.250** pesos más que el **2°**; éste, **1.700** más que el **3°**; y este último, **1.175** más que el **4°**. ¿Cuánto recibirá el **1°**?*

El dibujo que sigue representa una "pirámide numérica". En ella, cada sector o cuadrícula tiene asignado un número natural. Este número se obtiene sumando los números de los dos sectores del piso inferior que le sirven de base. Complete los números de la siguiente pirámide:



*Se tienen **3** envases, **A**, **B** y **C**, cuyas capacidades son, respectivamente, **3**, **5** y **8** litros. Se llena con agua sólo el envase **C**. Determine los sucesivos trasvases que hará de unos envases a otros de tal forma que al final obtenga **4** litros en cada uno de los dos envases mayores. Sólo dispone de los **8** litros iniciales.*



23. Si el número que hay en cada casilla es la suma de los números que se esconden tras los símbolos en las dos casillas inmediatas –a los lados, o arriba y abajo–, ¿cuáles son los posibles valores de **X**? (La casilla central se considera vacía).

❋	X	♣
37		43
▲	51	❑

***24.** A fin de año, los alumnos de la Escuela de Fútbol votan para elegir al mejor compañero. Este año fueron votados **5** alumnos. Cada uno sacó **6** votos menos que el anterior, y Pedro, que quedó de **5°**, obtuvo **10** votos. ¿Cuántos alumnos votaron?*

25. La longitud de la vereda que va a la escuela es de **20 metros más la mitad de su propia longitud**. ¿Cuántos metros de largo tiene la vereda?

***26.** El costo de la compra fue de **P** pesos y **C** céntimos. Pagué con un billete de **100** pesos, pero el cajero marcó **C** pesos y **P** céntimos y me dio un vuelto de **24,75** pesos. ¿Cuál fue el valor de la compra?*

Entre los dígitos del número **123456789** introduzca adecuadamente dos signos **+** y dos signos **–** de tal forma que el resultado de las sumas y restas sea **100**.

***27.** Un barril vacío y sin tapa pesa **10** kg. ¿Qué se le puede "agregar" al barril para que pese **9** kg?*

28. En el comedor comunal se han servido **861** raciones de lunes a viernes. Entre lunes y martes se sirvieron **442**; entre martes y miércoles, **528**; entre miércoles y jueves, **284**; y entre jueves y viernes, **203**. ¿Cuántas se sirvieron el lunes?

***29.** Una botella y su tapón cuestan **$1,10**. La botella cuesta **$1** más que el tapón. ¿Cuánto cuesta la botella?*

30. Tres fichas redondas tienen números escritos en sus dos lados (los **6** números son diferentes). Las fichas se lanzan y se suman los números que aparecen. Los posibles resultados de estas sumas son: **6**, **8**, **10**, **12**, **15**, **17**, **19** y **21**. Si las caras de las tres fichas llevan los números **1**, **2** y **3**, respectivamente, ¿qué números llevan en la parte de atrás?

*Ahora estamos en un río y disponemos de **dos** envases, uno de **9** y otro de **4** litros. ¿Cómo hacemos para sacar del río exactamente **6** litros de agua?*

Referencias bibliográficas

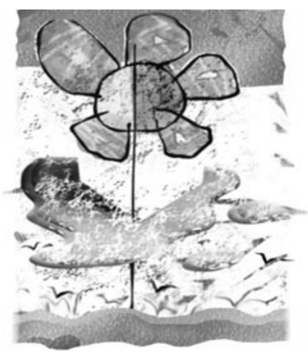
- Gadino, A. (1996). *Las operaciones aritméticas, los niños y la escuela*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.

- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. En 2.967 centésimas
2. A = 8, M = 9, O = 1, R = 0
3. Nunca
4. El doble del menor
5. 38: debe ser 39
6. 0,05 (0,55 – 0,5)
7. **a.** 2.141,5 unidades / **b.** 6.765,93 centenas / **c.** 639,8 centésimas / **d.** 6,17 decenas
8. 9 ovejas
9. 27 (952 – 925)
10. **Caso 1:** 2 hojas; **caso 2:** 3 hojas
11. 3º
12. 22 páginas
13. 521 (2.989 – 2.468)
14. Una sola vez; las demás veces se sustrae de lo que va quedando
15. 9 días
16. 41
17. 8, 12, 20
18. 27.000 pesos
19. 5 a Luisa y 3 a Miriam
20. Aumentó en 26
21. 66 años
22. 9.625 pesos
23. 29
24. 110 alumnos
25. 40 metros
26. 25,75 pesos
27. Un agujero… quitando un pedazo de barril que pese 1 kg
28. 130 raciones
29. $ 1,05
30. 10, 4 y 7, respectivamente, para 1, 2 y 3

Índice



*Este libro se terminó de imprimir
en el mes de julio de 2005.*